

”Wenn ein Wissen reif ist, Wissenschaft zu werden, so muß notwendig eine Krise entstehen; denn es wird die Differenz offenbar zwischen denen, die das einzelne trennen und getrennt darstellen und solchen, die das Allgemeine im Auge haben und gern das besondere an- und einfügen möchten. Wie nun aber die wissenschaftliche, ideelle, umgreifendere Behandlung sich mehr und mehr Freunde, Gönner und Mitarbeiter wirbt, so bleibt auf der höheren Stufe jene Trennung zwar nicht so entschieden, aber doch genugsam merklich.”

J. W. v. Goethe

1 Einführung

1.1 Historische Entwicklung

Die Entwicklung der Technischen Biegetheorie beginnt erst im 18. Jahrhundert. Sie verwendet zunächst nur die sinnlich erfahrbaren physikalischen Größen zur Beschreibung des Biegevorganges. So konnte Euler [1] allein mit den Lasten, Hebelarmen und Krümmungen unter Verwendung eines pauschalen Elastizitätsgesetzes für die Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung seine komplizierten, statisch und geometrisch nichtlinearen elastischen Kurven bei beliebig großer Verformung beschreiben. Eine einigermaßen zutreffende Kenntnis der Spannungsverteilung im Querschnitt gab es nicht, und daher war die Aufspaltung der Biegesteifigkeit in einen Material- und Querschnittsformanteil ebensowenig möglich wie eine Trennung zwischen Biegemoment und Normalkraft. Die Schnittgrößen wurden nur aus der Lastwirkung, also äußerlich, und nicht auch als Spannungsergebnisse verstanden.

Die erste zutreffende Darstellung einer stetigen Spannungsverteilung über die Querschnittshöhe und die Trennung von Normalkraft und Biegemoment auch im Spannungsbild, d.h. die erste Orthogonalisierung, verdanken wir Coulomb [2]. Es brauchte aber mehrere Jahrzehnte, bis seine 1776 veröffentlichten Erkenntnisse in der Fachwelt angenommen wurden. Wer sich ein Bild von den Schwierigkeiten der Anfangsphase machen will, in der noch fast alle uns vertrauten Begriffe fehlten, der findet in [3] eine interessante Zusammenstellung und Bewertung.

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde die Theorie der Biegung mit den Begriffen der Hauptachsen und der Trägheitsellipse vollendet. Die Zeit

dafür war offensichtlich überreif, denn eine ganze Reihe von Wissenschaftlern hat fast gleichzeitig Beiträge hierzu geliefert, so daß das Verdienst der zweiten Orthogonalisierung schwer einem einzigen Namen zuzuordnen ist. Die mathematischen Beziehungen fanden in der grafischen Darstellung von Land und Mohr [4] als Trägheitskreis ihre konzentrierteste Fassung.

Unabhängig davon entwickelte St. Venant seine nach ihm benannte Torsionstheorie, die den zur 1. Ableitung der Verdrehung gehörenden Spannungsanteil erfaßte. Analogien aus der Strömungs- und Membrantheorie (Stromlinien- und Seifenhautgleichnis) unterstützten die Anschaulichkeit. Erst 1909 ist C. v. Bach [5] durch die Ergebnisse von Biegeversuchen an U-Profilen auf Beziehungen gestoßen, die zwischen dem Biege- und Torsionsvorgang bestehen müssen. Vor allem C. Weber ist neben A. Eggenschwyler und R. Maillart die theoretische Durchdringung dieser Beziehungen und die Bedeutung des Schubmittelpunktes als Drillruhepunkt bei reiner Torsion und als Querkraftmittelpunkt bei reiner Biegung zu verdanken. Damit war auch die dritte Orthogonalisierung vollzogen.

Alle Bestrebungen waren aber stärker darauf gerichtet, die einzelnen Vorgänge zu trennen, als gemeinsame Eigenschaften aufzudecken und in einem System zu ordnen. Letzteres begann Bornscheuer in seiner "Systematischen Darstellung des Biege- und Verdrehvorgangs" [6]. Er führte einheitliche Bezeichnungen F für Flächenintegrale ein und kennzeichnete sie mit den Indizes des Integranden. So entstehen Flächenintegrale nullter (F), erster (F_y , F_z und F_w) und zweiter Ordnung (F_{yy} , F_{zz} , F_{ww} , F_{yz} , F_{yw} und F_{zw}). Die Dimensionsunterschiede zwischen den entsprechenden Widerständen der Biegung und der Verdrehung bleiben erhalten. Die Differentialgleichung zur Beschreibung der Beziehung zwischen Verformung und Belastung ist im Falle der Längung von 2. Ordnung, in den übrigen Vorgängen von 4. Ordnung.

Im Gebiet der Flächentragwerke entstand ebenfalls eine ganz unabhängige Theorie für prismatische Faltwerke. Die ebenen Teile des Querschnitts werden als Balken behandelt, die an den Kanten Übergangsbedingungen erfüllen müssen. Die erste Stufe, die Gelenkfaltwerkstheorie, fordert die Gleichheit der Totalverschiebung für die angrenzenden Scheiben an jedem Kantenpunkt. Mit den Kantenschubflüssen als Unbekannten kann diese Bedingung erfüllt werden. Die Entwicklung der Last in Reihen ist nicht notwendig, da sich der Querkraftverlauf aus einer Kantenlast affin in die anderen Scheiben überträgt. Diese Stufe wurde 1930 von Ehlers [8] und Craemer [9] vorgestellt. Der Geltungsbereich ist sehr klein und beschränkt sich auf mittellange dünnwandige Faltwerke.

1932 nahmen Grüning [10] und Gruber [11] eine Erweiterung vor, die mit Hilfe der Kantenbiegemomente auch die gegenseitigen Tangentenverdrehungen an den Kanten zu Null machten. Wegen der nichtaffinen Wirkung der Schubflüsse und Querbiegemomente war aber nun eine Reihenentwicklung der Lasten nötig. Das schränkte die Anwendungsmöglichkeiten auf andere Weise

ein. Plattendruck- und -längsbiegesteifigkeit sowie die Membranschubverzerrungen und -umfangsdehnungen blieben unberücksichtigt. Die klassische Faltwerkstheorie fand eine moderne Fassung in der "Finite Strip Method" z.B. in [12]. Hierin kann auch die Drucksteifigkeit und die Längsbiegesteifigkeit berücksichtigt werden. Auch Theorie II. Ordnung ist möglich. In allen drei Stufen tritt aber die Balkenwirkung des Gesamtquerschnitts nicht in Erscheinung.

Lundgren [13] suchte den Zugang für offene prismatische Schalen von der Balkenlösung her. Das Ungleichgewicht zwischen dem Schubfluß des Balkens und der Belastung wird als Zusatzlast auf den als Bogen behandelten Querschnitt gebracht und so werden die Querbiegemomente und die Profilverformung iterativ gefunden. Das Verfahren eignet sich für die Schalenbereiche, in denen die Profilverformung sich in Längsrichtung nicht wesentlich ändert, also nicht für die Auflagerbereiche und konzentrierte Lasten.

In einer Vielzahl von Arbeiten wird die Profilverformung von Kastenträgern als eine weitere Verformungsmöglichkeit untersucht. Eine umfangreiche Schrifttumsauswertung hierzu findet sich in [16].

Die stärkste Annäherung an die Verallgemeinerte Technische Biegetheorie (VTB) finden wir bei Wlassow [14]. Er ersetzte die Kraftgrößen an den Kanten durch die Wölbordinaten als Unbekannte und erhielt ein verkoppeltes Differentialgleichungssystem. Die Vereinigung mit der Technischen Biegetheorie wäre sicher nur eine Frage der Zeit gewesen, hätte ihn nicht der Tod allzufrüh aus seiner Arbeit gerissen.

Die vorausgegangenen Betrachtungen zeigen, daß sich die verschiedenen Teilgebiete innerhalb der prismatischen Tragwerke aus unabhängigen Wurzeln ganz unterschiedlich entwickelt haben. Die Tabelle 1.1 faßt dies schematisch zusammen. Das wissenschaftliche Interesse lag verständlicherweise mehr dort, wo höherstehende mathematische Beschreibungen zu erreichen waren, wodurch die durch Unstetigkeiten in der Querschnittsgeometrie benachteiligten Faltwerke stark zurückblieben. Der aufgrund der verbindenden Eigenschaft prismatischer Gestalt vorhandene Kern gemeinsamen mechanischen Verhaltens wurde bis auf Bemühungen im Teilgebiet der Stäbe und Balken in der Vergangenheit nicht in die Beschreibung aufgenommen.

Die Entwicklung der Technischen Biegetheorie und ihre Darstellung in den vier orthogonalen Vorgängen zeigt die Tabelle 1.2. Die Orthogonalisierungsbedingungen durch die Querschnittseigenschaften Schwerpunkt, Hauptachsen und Schubmittelpunkt werfen die Frage nach weiteren Orthogonalisierungsmöglichkeiten auf, welche zusätzliche Vorgänge mit neuen Steifigkeiten und Schnittgrößen ermöglichen. Wie der folgende Abschnitt zeigen wird, sind auch mehr gemeinsame Eigenschaften in den vier bekannten Vorgängen vorhanden, als in den Symbolen und Namen der Querschnittswerte zum Ausdruck kommen.

Tabelle 1.1 Das Gebiet der prismatischen Tragwerke.

Tragwerk	Vorgang	Beschreibung	Verfahren
Stäbe Balken	Längung Biegung Drillung	gew. DGL 2.Ord. gew. DGL 4.Ord.	alle Verfahren der Stabstatik
Scheiben Platten	— Biegung	Airy Kirchhoff part. DGL 4.Ord.	z.B. Energie-, Differenzen- verfahren, FEM
prismatische Schalen	Membran- Biegetheorie	Systeme part. DGLn	z.B. Energie- Differenzen- verfahren, FEM
prismatische Faltwerke		Wlassow Grundverwölbungen Kantenschübe	lineare Gleichungssysteme

Tabelle 1.2 Die vier Vorgänge der Technischen Biegetheorie und ihre historische Entwicklung.

Vorgang	Orthogona- lisierung	Steifig- keit	Schnitt- grösse	Verschie- bung	Zeit
Längung	Schwer- punkt	EA	N	u	Ende 18.Jhd.
Biegung 1	Haupt- achsen	EI_1	M_1	v	Mitte 19.Jhd.
Biegung 2	Schubmit- telpunkt	EI_2	M_2	w	Anfang 20.Jhd.
Torsion	?	EC_M	W	ϑ	
?		?	?	?	

1.2 Das System der Technischen Biegetheorie

Gegenstand der Technischen Biegetheorie ist die Berechnung der Spannungen und Verformungen von Körpern, die sich als eindimensionale Strukturen idealisieren lassen. Darunter sind die Vorgänge zusammengefaßt, welche eine Längenänderung, eine Biegung sowie Verdrillung des Körpers beschreiben.

Ihr Gültigkeitsbereich wird durch die Geometrie des Körpers aber auch durch Lagerung, Belastung und Aufgabenstellung abgegrenzt.

Das Attribut "Technisch" bezeichnet die Tatsache, daß die Theorie zugunsten einer einfachen rechnerischen Behandlung auf die wesentlichen Fälle beschränkt wird, die jedoch für die Mehrzahl der Anwendungen ausreichen. Konkret sind damit folgende beiden Einschränkungen gemeint: Es werden keine Schubverzerrungen betrachtet und die Querschnittsform ändert sich über die Länge nicht. Die erstgenannte Einschränkung wird auch mit der Bezeichnung "Bernoulli-Balken" identifiziert. Die letztgenannte geometrische Eigenschaft des Körpers bezeichnen wir auch mit "prismatisch". Sie ist keine starke Einschränkung, da ein Körper meistens in Teilabschnitte mit der geforderten Eigenschaft zerlegt werden kann und viele Herstellungsverfahren prismatische Strukturen erzeugen.

Den Teilgebieten der Technischen Biegetheorie liegen folgende gemeinsame Annahmen zugrunde: Der Körper verhält sich so, als sei er aus einzelnen, in Längsrichtung verlaufenden Fasern zusammengesetzt, für die jeweils das Elastizitätsgesetz des einachsigen Spannungszustands gilt und die in starrem Schubverbund stehen. Spannungen und Verformungen quer zur Stabachse werden nicht betrachtet. Die Querschnittsform wird durch den Verformungsvorgang nicht verändert.

Die Benennung der Teilgebiete in der Literatur ist nicht eindeutig. Bisweilen wird mit den Bezeichnungen "Stabtheorie" und "Balkentheorie" die Unterscheidung von Normalkraft- und Biegeverformung kenntlich gemacht, während der Verdrehvorgang auch unter "Theorie des Torsionsstabes" geführt wird.

Wie der vorangegangene Abschnitt deutlich gemacht hat, haben sich die Teilgebiete der Technischen Biegetheorie weitgehend unabhängig voneinander entwickelt, was zur Folge hatte, daß Begriffe und Beziehungen auf das jeweilige Gebiet zugeschnitten sind und sich das Gemeinsame der verschiedenen Vorgänge nicht in ihnen widerspiegelt. Dieses besteht zunächst nur in der Reduzierung des Problems auf eine Dimension: Durch vereinfachende Annahmen bezüglich des Spannungs- und Verformungsverlaufes über den Querschnitt ist es möglich, pauschale Größen (Querschnittswerte, resultierende Schnittgrößen) einzuführen welche über einfache Gleichungen miteinander in Beziehung gesetzt werden können.

Bei der Definition von Querschnittswerten und resultierenden Schnittgrößen sowie bei der Interpretation der Gleichgewichtsbedingungen und Elastizitäts-

gesetze läßt sich in der herkömmlichen Formulierung jedoch außer formalen Analogien keine gemeinsame Grundlage mehr erkennen. Daß diese dennoch vorhanden ist, daß also die vier Vorgänge der Technischen Biegetheorie als ein einziges System begriffen werden können, dieses soll im folgenden Abschnitt gezeigt werden.

Dazu ist es notwendig, die wohlbekanntesten Begriffe auf neuartige, zunächst etwas ungewohnte Weise zu deuten. Der Blick wird darauf gerichtet sein, sie auf eine so allgemeine Art zu interpretieren, daß die gemeinsame Wurzel erkennbar wird. Es wird sich dabei erweisen, daß die neu gewonnene Betrachtungsweise nicht nur zu einer systematischen Sicht der Technischen Biegetheorie führt, sondern auch — und das ist ja das eigentliche Ziel — die Möglichkeit der Verallgemeinerung in sich trägt. Bestimmte Begriffe müssen dabei eine ganz neue Bewertung erhalten, so z.B. der Begriff der "Wölbfunktion", welcher sich als grundlegende Beschreibungsmöglichkeit sämtlicher Verformungsvorgänge herausstellen wird.

Gleichzeitig erfolgt dabei auch eine Einführung in die Begriffe, Struktur und neuartige Bezeichnungsweise der Verallgemeinerten Technischen Biegetheorie (VTB). Damit sind dann die Vorbereitungen getroffen, um im darauf folgenden Abschnitt den ersten Schritt über die Grenzen der Technischen Biegetheorie zu wagen. Zuvor soll jedoch eine Definition der wichtigsten Begriffe gegeben werden.

1.2.1 Allgemeine Definitionen

1. Die **Eigenschaften** der Tragwerke werden durch **Systemgrößen** beschrieben.

- geometrische: Form und Abmessung der Stabachsen und der Stabquerschnitte, Zuordnung von Stäben und Knoten
- statische: Anordnung und Wirkungsweise von Mechanismen und Lagerbedingungen
- werkstoffliche: Elastizitätsmodul und Schubmodul (oder Querdehnungszahl) der verwendeten Werkstoffe

2. Der **Zustand** der Tragwerke wird durch **Zustandsgrößen** beschrieben.

- **Weggrößen** (Verformungsgrößen)
 - Äußere Weggrößen: Lageänderungen der Stabelemente
 - Innere Weggrößen: Formänderungen der Stabelemente
- **Kraftgrößen**
 - Äußere Kraftgrößen (Lasten)
 - Innere Kraftgrößen (Schnittgrößen)

Die äußeren und die inneren Zustandsgrößen sind jeweils zugehörige **Arbeitskomplemente**.

3. Das **Verhalten** der Tragwerke wird durch **Beziehungen** beschrieben.
 - geometrische: **Differentialbeziehungen** zwischen den äußeren und inneren Weggrößen (Verträglichkeit, Kompatibilität)
 - statische: **Gleichgewichtsbeziehungen** zwischen den äußeren und inneren Kraftgrößen
 - werkstoffliche: **Elastizitätsbeziehungen** zwischen den inneren Kraft- und Weggrößen
4. Durch die Verwendung **orthogonaler** Zustandsgrößen kann das Verhalten in einzelnen **Vorgängen** getrennt und unabhängig behandelt werden.
 - Längung (Normalkraft und Längenänderung)
 - Biegung 1 (um die eine Hauptachse)
 - Biegung 2 (um die andere Hauptachse)
 - Drillung (Torsion, Wölbkrafttorsion)
5. Die Ursache für die Zustandsänderungen der Tragwerke sind die **Einwirkungen**. Jede der unter 2. genannten Zustandsgrößen kann Einwirkung sein. In der Regel sind es äußere Kraftgrößen — **Lasten** — und äußere Weggrößen — **Lagerverschiebungen** und **–verdrehungen**. Auch innere Weggrößen — **Temperaturänderungen, singuläre Verformungen** — können Einwirkungen sein. Die restlichen Zustandsgrößen sind dann jeweils die **Antwort** der Tragwerke auf die Einwirkung.
6. Mathematisch gleichartige Beziehungen mit mechanisch unterschiedlichem Inhalt können als **Analogien** genutzt werden.
 - Mohr'sche Analogie: Geometrische Differentialbeziehungen werden als statische Gleichgewichtsbedingungen behandelt.
 - Analogie zwischen Wölbkrafttorsion und querbelastetem Zugstab.

1.2.2 Die einheitliche Darstellung der Technischen Biegetheorie

Vorgänge

Wir wollen an den vierten Punkt des vorangegangenen Abschnitts anknüpfend bereits die erste neue Bezeichnungsweise einführen:

Die Zustandsänderungen eines Tragwerks, welche durch die Technische Biegetheorie beschrieben werden, bezeichnen wir als "Vorgänge" und nummerieren sie von 1 bis 4 durch. Somit ist Vorgang 1 die Längung, Vorgang

2 und 3 sind die beiden Biegungen um die Hauptachsen und Vorgang 4 ist die Torsion.

Die vier Vorgänge stellen jeweils ein eindimensionales Modell des Körpers dar. In Bild 1.1 ist die dreidimensionale Betrachtungsweise den vier eindimensionalen Vorgängen der Technischen Biegetheorie gegenübergestellt.

Produktdarstellung

Die Punkte des dreidimensionalen Körpers sind durch ihre Koordinaten (x, y, z) gegeben. Der Verformungszustand ist festgelegt durch die drei Verschiebungen u , v und w in jedem der Punkte. Der Spannungszustand wird durch die im Querschnitt wirkenden Normalspannungen σ_x und Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz} beschrieben. Das Materialverhalten ist im Elastizitätsgesetz des einachsigen Spannungszustands für die einzelnen Fasern ausgedrückt.

Dagegen ist der Körper in seiner Idealisierung durch die Technische Biegetheorie durch eine einzige Koordinate bestimmt, nämlich die x -Achse. Das Verformungsverhalten wird durch vereinfachende Annahmen auf vier Freiheitsgrade reduziert, nämlich die vier möglichen unabhängigen Starrkörperbewegungen des Querschnitts. Sie werden beschrieben durch die drei Verschiebungen u , v und w der Stabachse sowie die Verdrehung ϑ (die Verdrehungen v' und w' sind ja wegen der Bernoulli-Hypothese keine unabhängigen Größen). Die Spannungen werden in resultierenden Schnittgrößen zusammengefaßt, welche durch ein pauschales Elastizitätsgesetz mit den Verformungsgrößen in Beziehung gesetzt werden.

Wir wollen uns nun mit dem Zusammenhang beschäftigen, der zwischen den Größen des dreidimensionalen Modells und den der vier eindimensionalen Vorgänge besteht. Während die eine Richtung — nämlich die Reduzierung auf eine Dimension durch die Einführung von Schnittgrößen, Berechnung von Querschnittswerten usw. — i. allg. ausführlich behandelt wird, kommt der anderen Richtung — nämlich der Rückrechnung von Verschiebungen und Spannungen für den ganzen Körper — nicht dieselbe Aufmerksamkeit zu.

Allgemein läßt sich dazu folgendes feststellen: Mit der Lösung der Differentialgleichung eines Vorgangs, d.h. mit der Ermittlung der betreffenden Verformungsfunktion, ist der Spannungs- und Verformungszustand des gesamten Körpers bestimmt. So können z.B. bei der Biegung 2 aus der Kenntnis der Lösungsfunktion $w(x)$ und ihren Ableitungen die Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen in jedem Punkt (x, y, z) ermittelt werden. Dies aber bedeutet, daß es möglich sein muß, für alle diese Größen eine Produktdarstellung mit den folgenden Eigenschaften zu formulieren: Die Abhängigkeit von der Koordinate x ist durch die Funktion $w(x)$ oder eine ihrer Ableitungen gegeben. Die Abhängigkeit von y und z wird durch eine andere Funktion beschrieben, die

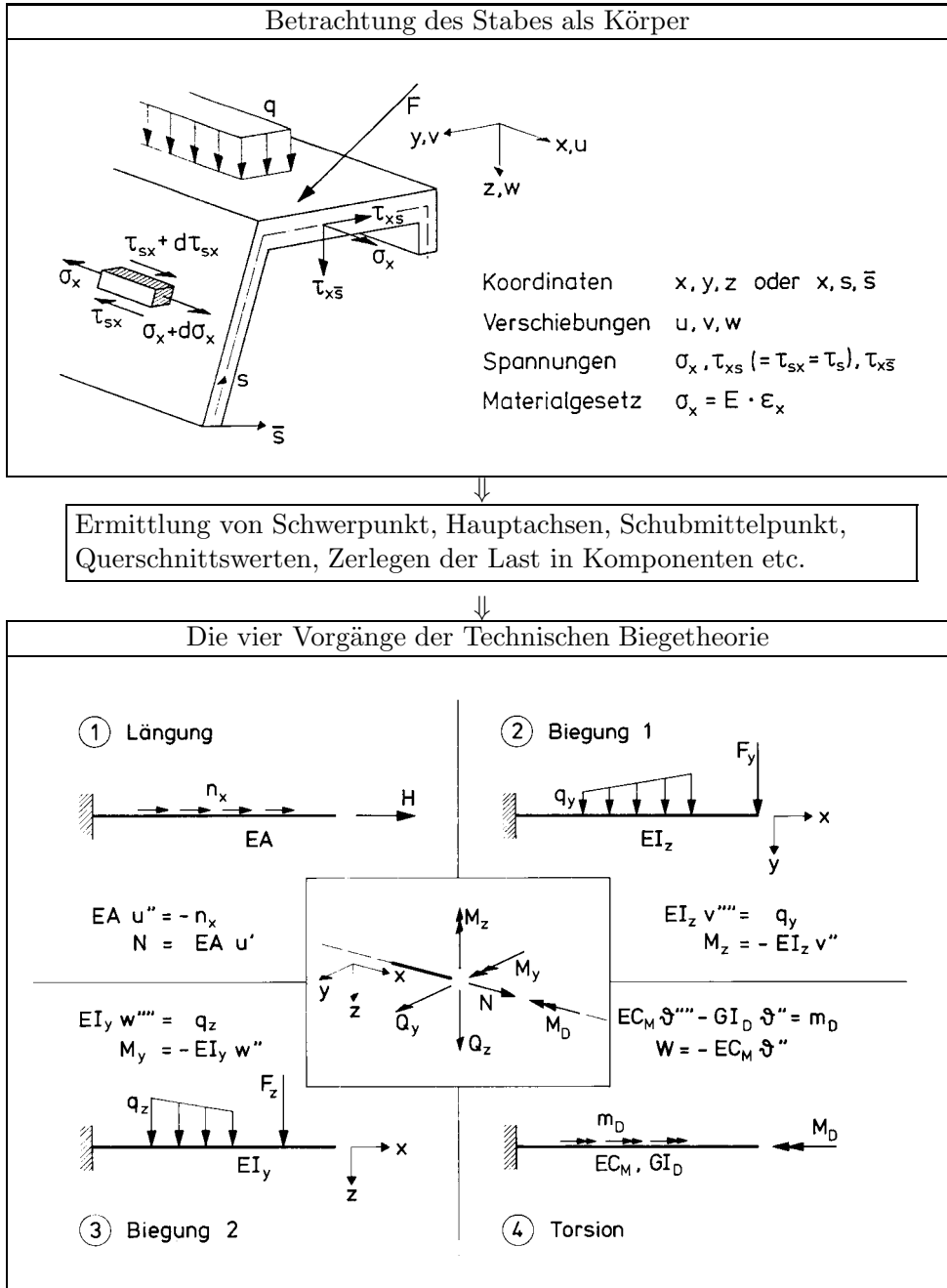


Bild 1.1 Der Stab in seiner Betrachtung als dreidimensionales Modell gegenüber der ein-dimensionalen Betrachtung in den vier Vorgängen der Technischen Biegetheorie

von der Lösung $w(x)$ unabhängig ist und somit bereits durch den Querschnitt festgelegt sein muß.

Um diese Produktdarstellungen zu finden, müssen wir uns konkret einer der beteiligten Größen zuwenden. Die Frage ist nun, welche dafür am geeignetesten erscheint. Es muß sich um eine Größe handeln, die bei allen vier Vorgängen gleichermaßen eine wichtige Rolle spielt, d.h. direkt in die Beschreibung der Tragwirkung eingeht. Dabei stoßen wir auf folgende charakteristische Eigenschaft der Vorgänge:

In jedem der vier Vorgänge wird die wesentliche elastische Energie in den Längsdehnungen der Fasern gespeichert.

Da die Längsdehnungen durch die Ableitung der u -Verschiebungen gegeben sind, scheinen diese als Ansatzpunkt für unsere Untersuchungen geeignet.

Verwölbungen

Betrachten wir die bei einem der vier Vorgänge entstehenden u -Verschiebungen an verschiedenen Stellen des Tragwerks, so stellen wir fest, daß ihr Verlauf über den Querschnitt an jeder Stelle x des Balkens vom gleichen Typ ist, lediglich die Amplitude des Bildes ändert sich längs der Achse, was in Bild 1.2 am Beispiel der Biegung verdeutlicht wird.

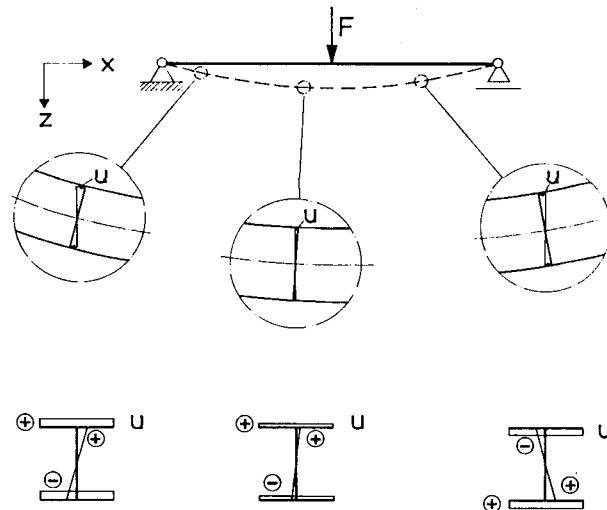


Bild 1.2 u -Verschiebungen aufgrund einer Durchbiegung $w(x)$.

Man kann somit die u -Verschiebungen als Vielfache eines Einheitsverschiebungsbildes auffassen. Wählen wir als Einheit diejenigen u -Verschiebungen,

welche sich aus $w'(x) = 1$, d.h. einer Drehung des Querschnitts um den Winkel 1 ergeben, so ist die betreffende Funktion gerade die wohlbekannte "z-Linie" $z(s)$, welche normalerweise nur bei der Berechnung des Einheitsschubflusses oder des Trägheitsmomentes in Erscheinung tritt. Der Zusammenhang zwischen der Verformungsgröße $w(x)$ und den u -Verschiebungen lautet

$$u(x, y, z) = -z \cdot w'(x) \quad (1.1)$$

$$\text{bzw.} \quad u(x, y, z) = -y \cdot v'(x) . \quad (1.2)$$

Diese Beziehung ist nicht neu, während jedoch $y(s)$ und $z(s)$ üblicherweise als "Abstand von der neutralen Faser" verstanden werden, kommt ihnen nun die Bedeutung einer Einheitsfunktion zu.

In der Torsion entstehen i. allg. kompliziertere u -Verschiebungsbilder, was in der Definition der Einheitsverwölbung $\omega(s)$ seinen Niederschlag gefunden hat. Mit ihr läßt sich folgende Produktdarstellung der Verwölbungen angeben:

$$u(x, y, z) = \omega(y, z) \cdot \vartheta'(x) . \quad (1.3)$$

Um eine gemeinsame Beschreibung der Beziehungen (1.1) bis (1.3) zu ermöglichen, wollen wir die Bezeichnung "Verwölbung" in einer erweiterten Form einführen:

Sämtliche u -Verschiebungen eines Querschnitts werden als Verwölbungen bzw. Wölbfunktionen bezeichnet, unabhängig davon, ob der Querschnitt eben bleibt oder nicht.

Als Gemeinsamkeit zwischen (1.1), (1.2) und (1.3) fällt ins Auge, daß jede der Wölbfunktionen proportional zur Ableitung der zugehörigen Verformung ist:

Bei Biegung und Torsion werden Verwölbungen nur durch Änderungen der Verformungsfunktion erzeugt.

Wir können die Funktionen $y(s)$ und $z(s)$ auch als Einheitsverwölbungen bezeichnen. Die gemeinsame Benennung soll sich nun in einem einheitlichen Symbol ausdrücken:

Die Einheitsverwölbungen werden mit ${}^k\tilde{u}(s)$ bezeichnet. Dabei steht der Index k für die Nummer des betreffenden Vorgangs. Die Tilde $\tilde{}$ kennzeichnet den Charakter der "Einheitsfunktion".

Die ungewohnte Stellung der Indizes ist nicht nur aus paktischen Erwägungen gewählt worden¹, sondern auch zur Verdeutlichung der neuartigen Systematik. Mit der neuen Bezeichnungsweise können wir nun zusammenfassend sagen:

¹ So bleibt der Platz unten rechts für Knoten- oder Scheibenindizes bzw. Koordinaten reserviert.

Die Einheitsverwölbungen der Biegung sind die linearen Funktionen ${}^2\tilde{u} = -y$ und ${}^3\tilde{u} = -z$, die Einheitsverwölbung der Torsion erhält die neue Schreibweise ${}^4\tilde{u} = \omega$. Beim Vorgang 1 sind die u -Verschiebungen über den Querschnitt konstant, ihm läßt sich somit die Einheitsverwölbung 1 zuordnen.

Aus Gründen, auf die hier noch nicht näher eingegangen werden soll, wird die Einheitsverwölbung des ersten Vorgangs mit negativem Vorzeichen definiert. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} {}^1\tilde{u}(y, z) &= -1 \\ {}^2\tilde{u}(y, z) &= -y \\ {}^3\tilde{u}(y, z) &= -z \\ {}^4\tilde{u}(y, z) &= \omega . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Abschließend sei noch daran erinnert, daß die Koordinaten y und z auf das Hauptachsensystem bezogen sind und demzufolge die Einheitsverwölbungen ${}^2\tilde{u}(y, z)$ und ${}^3\tilde{u}(y, z)$ genau wie $\omega(y, z) = {}^4\tilde{u}(y, z)$ querschnittsabhängige Funktionen sind.

Querschnittsverschiebungen

Als nächstes wenden wir uns den Verschiebungen in der Querschnittsebene zu. Hier läßt sich dieselbe Beobachtung wie bei den Verwölbungen machen:

Die v - und w -Verschiebungen eines Vorganges sind an jeder Stelle x vom selben Typ und können als Vielfache eines Einheitsverformungsbildes aufgefaßt werden.

Für den Vorgang 1 ist das trivial, da hier keine Querschnittsverschiebungen auftreten. Für die Vorgänge 2 und 3 ist das in Bild 1.3 veranschaulicht. Während wir die Verwölbungen als Funktion über den Querschnitt aufgetragen haben, wählen wir für die Darstellung der v - und w -Verschiebungen das entstehende Verformungsbild, damit beide Komponenten in einem Bild erkennbar sind.

Wollen wir nun die Produktdarstellung für die Querschnittsverschiebungen formulieren, so müssen wir analog zu den Einheitsverwölbungen die Einheitsverschiebungen ${}^k\tilde{v}$ und ${}^k\tilde{w}$ einführen. Ihre Normierung ist beliebig, wir wählen als Einheit das Verformungsbild, welches sich aus der Verformungsgröße 1 ($w(x) = 1$, $\vartheta(x) = 1$ etc.) ergibt. Damit schreiben sich die Produktdarstellungen der Querschnittsverschiebungen folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \text{Vorgang 2:} \quad v(x, y, z) &= {}^2\tilde{v}(y, z) \cdot v(x) \\ w(x, y, z) &= {}^2\tilde{w}(y, z) \cdot v(x) \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} {}^2\tilde{v}(y, z) &= 1 , \\ {}^2\tilde{w}(y, z) &= 0 . \end{aligned} \tag{1.5}$$

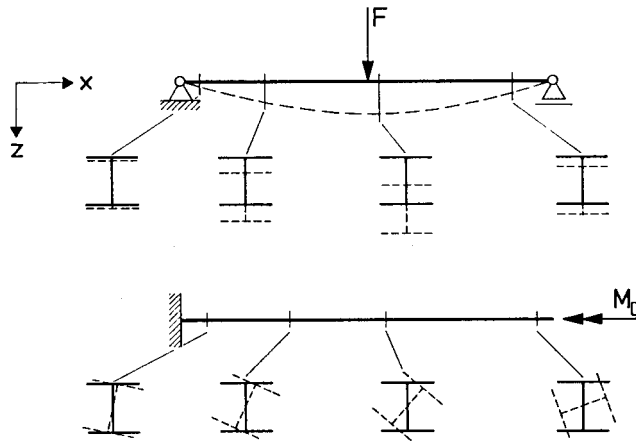


Bild 1.3 Querschnittsverchiebungen bei Biegung und Torsion

Vorgang 3: $v(x, y, z) = {}^3\tilde{v}(y, z) \cdot w(x)$ mit ${}^3\tilde{v}(y, z) = 0$,
 $w(x, y, z) = {}^3\tilde{w}(y, z) \cdot w(x)$ mit ${}^3\tilde{w}(y, z) = 1$. (1.6)

Nur bei der Torsion treten beide Komponenten auf (Bild 1.4).

Vorgang 4: $v(x, y, z) = {}^4\tilde{v}(y, z) \cdot \vartheta(x)$ mit ${}^4\tilde{v}(y, z) = z_M - z$,
 $w(x, y, z) = {}^4\tilde{w}(y, z) \cdot \vartheta(x)$ mit ${}^4\tilde{w}(y, z) = y - y_M$. (1.7)

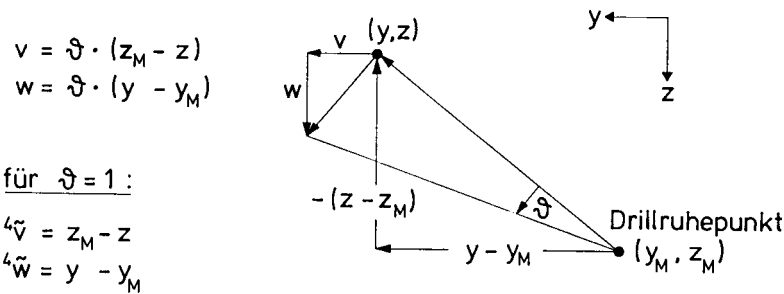


Bild 1.4 Querschnittsverchiebungen eines Punktes (y, z) aufgrund einer Verdrehung ϑ . Für $\vartheta = 1$ ergeben sich die Einheitsverschiebungen ${}^4\tilde{v} = -(z - z_M)$ und ${}^4\tilde{w} = y - y_M$.

Für den Vorgang 1 gilt ${}^1\tilde{v} \equiv {}^1\tilde{w} \equiv 0$. Den Produktdarstellungen (1.5) bis (1.7) ist gemeinsam, daß sie die Verformungsfunktion selbst enthalten (im Gegensatz zu den Verwölbungen, welche proportional zur Ableitung der Verformungsfunktion sind).

Um die Gewöhnung an die neuen Begriffe Einheitsverwölbung und Einheitsverschiebung zu erleichtern, sind diese in Bild 1.5 für einige einfache Profile qualitativ aufgetragen.

Spannungen

Für die Längsspannungen gilt das Elastizitätsgesetz des einachsigen Spannungszustands $\sigma_x = E u'$. Setzen wir für u die Produktansätze der einzelnen Vorgänge ein, so können wir folgendes feststellen: Die Differentiation nach x wirkt sich lediglich auf die beteiligte Verformungsfunktion aus, während die Verteilung über den Querschnitt davon unberührt bleibt. Daraus ergibt sich, daß der Verlauf der Längsspannungen über den Querschnitt durch die Einheitsverwölbungen beschrieben werden kann. Die Produktdarstellungen der Spannungen in den Vorgängen 1 bis 4 lauten

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y, z) &= E \cdot {}^1\tilde{u}(y, z) \cdot u'(x) , \\ \sigma_x(x, y, z) &= E \cdot {}^2\tilde{u}(y, z) \cdot v''(x) , \\ \sigma_x(x, y, z) &= E \cdot {}^3\tilde{u}(y, z) \cdot w''(x) , \\ \sigma_x(x, y, z) &= E \cdot {}^4\tilde{u}(y, z) \cdot \vartheta''(x) .\end{aligned}\tag{1.8}$$

In (1.8) fällt auf, daß der erste Vorgang gegenüber den anderen um eine Ableitungsstufe versetzt ist; die Verformungsgrößen v , w und ϑ gehen mit der zweiten Ableitung in die Gleichung ein, die Verformungsgröße u dagegen mit der ersten Ableitung. Der Grund dafür wird im weiteren klar werden. Eine Behebung dieses Mangels zu diesem Zeitpunkt ist nicht sinnvoll. Wir werden so vorgehen, daß wir den ersten Vorgang, soweit es geht, in die einheitliche Darstellung einbeziehen und an den Stellen, wo das nicht möglich ist, ihn stillschweigend übergehen. Die dadurch entstehenden Lücken bzw. Unverträglichkeiten müssen zunächst hingenommen werden. Eine Aufarbeitung dieser Rückstände erfolgt in Abschn. 2.9.

Neben den Längsspannungen ist auch der Schubfluß $\tau_s \cdot t$ von Bedeutung. Er hängt über das Gleichgewicht mit der Ableitung der Längsspannungen zusammen, was sich in der sogenannten "Dübelformel" (s. auch Bild 1.1)

$$\tau_s \cdot t = - \int_0^s t \cdot \sigma_x' ds .\tag{1.9}$$

ausdrückt. Nach der Herleitung der Produktdarstellung für σ_x ist es offensichtlich, daß eine solche Darstellung auch für den Schubfluß möglich ist. Durch

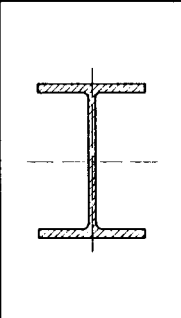
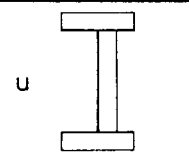
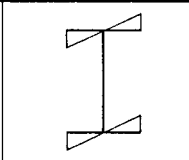
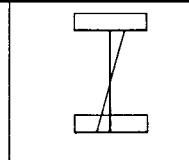
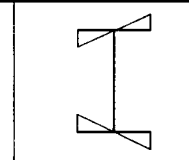
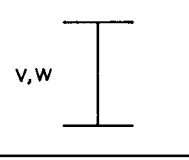
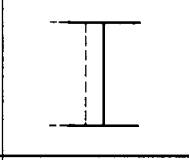
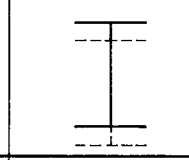
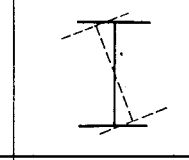
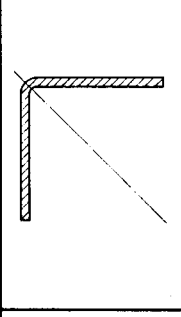
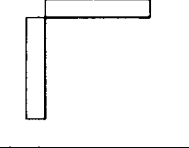
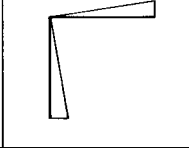
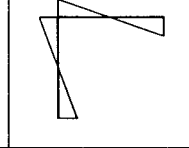
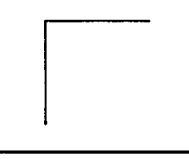
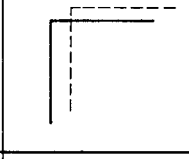
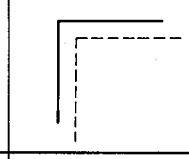
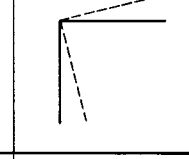
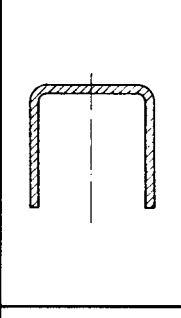
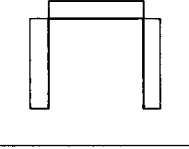
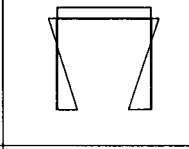
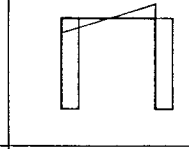
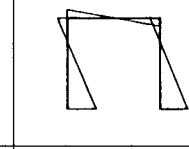
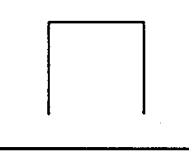
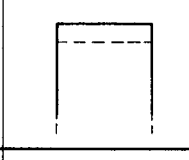
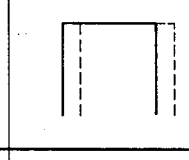

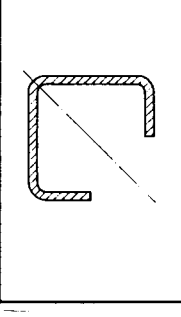
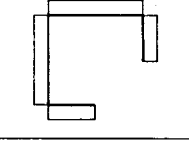
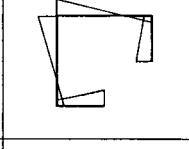
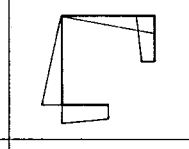
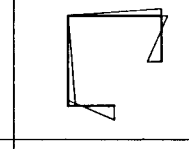
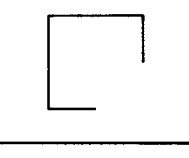
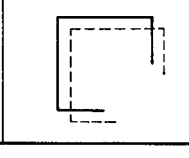

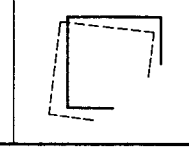
	Längung	Biegung 1	Biegung 2	Torsion
	u 			
	v, w 			
				"wölbfrei"
				
				
				
				
				

Bild 1.5 Einheitsverwölbungen und Einheitsverschiebungen für einige einfache Profile (Die Einheitsverwölbungen sind als Funktionen am Querschnitt aufgetragen, die Einheitsverschiebungen als Bild)

Ersetzen von σ_x in (1.9) gemäß Formel (1.8) erhält man z.B. für den Vorgang 2 als Darstellung des Schubflusses

$$\begin{aligned}\tau_s \cdot t &= - \int_s t \cdot (E^2 \tilde{u} v'')' ds \\ &= -E \int_s 2 \tilde{u} t ds \cdot v''' .\end{aligned}\tag{1.10}$$

Die bisherigen Überlegungen haben zwei Hauptergebnisse :

- Allen vier Vorgängen kann eine Einheitsverwölbung zugeordnet werden. Ihre Bedeutung geht über die ursprünglich rein geometrische hinaus, da sie auch zur Beschreibung der Spannungsverteilung herangezogen werden kann.
- Die Verformungsfunktionen $v(x)$, $w(x)$ und $\vartheta(x)$ können offensichtlich in einer wesentlich allgemeineren Weise verstanden werden: Sämtliche Spannungen und Verschiebungen sind über die Produktdarstellungen durch die Verformungsfunktionen bestimmt. Somit sind sie neben ihrer primären geometrischen Bedeutung auch als "Betonungsfunktionen" zu sehen.

Wir bezeichnen Funktionen, in denen ein komplexes Verformungsbild zusammengefaßt ist, auch als "Verformungsresultanten".

Verformungsfunktionen

Der gemeinsame Charakter der Verformungsfunktionen soll sich nun auch in einem einheitlichen Symbol niederschlagen: Wir benennen die Verformungsfunktionen der Vorgänge 2 bis 4 mit ${}^k V(x)$:

$$\begin{aligned}v(x) &= {}^2 V(x) \\ w(x) &= {}^3 V(x) \\ \vartheta(x) &= {}^4 V(x) .\end{aligned}\tag{1.11}$$

Mit dieser neuen Bezeichnungsweise können die zuvor gewonnenen Produktdarstellungen (1.1) bis (1.8) für alle Vorgänge in jeweils einer einzigen Gleichung formuliert werden:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= {}^k \tilde{u}(y, z) \cdot {}^k V'(x) \\ v(x, y, z) &= {}^k \tilde{v}(y, z) \cdot {}^k V(x) \\ w(x, y, z) &= {}^k \tilde{w}(y, z) \cdot {}^k V(x) \\ \sigma_x(x, y, z) &= E \cdot {}^k \tilde{u}(y, z) \cdot {}^k V''(x) \\ \tau_s(x, y, z) \cdot t(s) &= - E \int_s {}^k \tilde{u}(y, z) t ds \cdot {}^k V'''(x)\end{aligned}\tag{1.12a-e}$$

für $k = 1, 2, 3, 4$.

Hierbei ist zu beachten, daß (1.12) die Verschiebungen und Spannungen jeweils nur für einen Vorgang angibt. Hat man einen Lastfall, bei dem mehrere Verformungsvorgänge beteiligt sind, so sind die Ergebnisse der einzelnen Vorgänge zu überlagern, es ist also auf den rechten Seiten von (1.12) die Summe über k zu bilden.

Neben der Möglichkeit einer systematischen Darstellung hat die neue Bezeichnung ${}^kV(x)$ und das neue Verständnis als "Betonungsfunktion" einen weiteren Vorteil, mit ihr ist nämlich die Möglichkeit einer Erweiterung eröffnet: Mit den Bezeichnungen $u(x)$, $v(x)$ etc. und den ihnen anhängenden Vorstellungen sind die Freiheitsgrade des Querschnitts vollständig ausgeschöpft. Dagegen ist eine weitere Verformungsresultante ${}^5V(x)$, die zu einem noch zu definierenden Einheitsverformungszustand gehört, durchaus denkbar.

Schnittgrößen

Mit der neu gewonnen Vorstellung von der Einheitsverwölbung ist es nicht schwer, auch die übrigen Begriffe auf einheitlichen Definitionen aufzubauen. Beginnen wir mit den Schnittgrößen aus den Längsspannungen. Für den Vorgang 4 ist das Wölbmoment $W(x)$ definiert durch

$$W = - \int_A \sigma_x \cdot \omega \, dA . \quad (1.13a)$$

Während diese Definition als Arbeitsausdruck gesehen werden kann, ist eine derartige Sicht bei den Schnittgrößen der anderen drei Vorgänge nicht üblich. Bei den Festlegungen

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x \, dA , \\ M_y &= \int_A \sigma_x z \, dA , \\ M_z &= \int_A \sigma_x y \, dA \end{aligned} \quad (1.13b-d)$$

werden nämlich die Integranden als Kraftwirkung der Längsspannungen bezüglich der beteiligten Verformung verstanden (z.B. "Spannung mal Hebelarm"). Mit den oben eingeführten Einheitsverwölbungen läßt sich nun für alle vier Schnittgrößen eine einheitliche Definition angeben. Um diese auch in einer einzigen Gleichung anschreiben zu können, ist es erforderlich, analog zur Einführung der Verformungsresultanten ein einheitliches Symbol für die Schnittgrößen festzulegen. Dazu übernehmen wir den Namen vom Wölbmoment und schreiben:

$$N \rightarrow {}^1W(x), \quad M_z \rightarrow {}^2W(x), \quad M_y \rightarrow {}^3W(x), \quad W \rightarrow {}^4W(x) . \quad (1.14)$$

Jetzt kann eine einzige Definitionsgleichung für alle Schnittgrößen angegeben werden

$${}^k W = - \int_A \sigma_x {}^k \tilde{u} \, dA, \quad (1.15)$$

welche sich in folgende Worte fassen läßt

Die Schnittgröße ${}^k W$ ist die Arbeit der Längsspannungen an der Einheitsverwölbung ${}^k \tilde{u}$.

Die Richtigkeit der Definition kann durch Einsetzen der Einheitsverwölbungen (1.4) und Vergleich mit (1.13a-d) sofort bestätigt werden.

Auch die Schubflüsse werden zu Resultierenden zusammengefaßt, nämlich den Querkräften bzw. dem Torsionsmoment. Die Herleitung einer einheitlichen Definition sei dem Leser überlassen. Ein neues Symbol braucht nicht eingeführt zu werden, da sie die Ableitungen der Schnittgröße ${}^k W(x)$ sind:

$$Q_y \rightarrow {}^2 W', \quad Q_z \rightarrow {}^3 W', \quad M_D \rightarrow {}^4 W'. \quad (1.16)$$

Die Schnittgrößen ${}^k W$ stehen über pauschale Elastizitätsgesetze mit den Verformungsgrößen ${}^k V$ in Zusammenhang. Bevor wir diesen in einheitlicher Form angeben können, müssen zunächst die Querschnittswerte ein gemeinsames Symbol erhalten.

Wölbwiderstände

Beginnen wir dafür bei der Torsion: Die Wölbsteifigkeit des Vorgangs 4 setzt sich zusammen aus dem Materialanteil E und dem als "Wölbwiderstand" bezeichneten Querschnittsformanteil

$$C_M = \int_A \omega^2 \, dA. \quad (1.17)$$

Formal ist der Wölbwiderstand das Integral über die quadrierte Einheitsverwölbung. Im Elastizitätsgesetz

$$W = -EC_M \vartheta'' \quad (1.18)$$

stellt er die Beziehung zwischen Verformung und Schnittgröße her.

Da wir auch den übrigen Vorgängen eine Einheitsverwölbung zuordnen, liegt es nahe, zu untersuchen, ob deren Querschnittswerte sich in gleicher Weise definieren lassen. Dies ist der Fall, wie sich leicht bestätigen läßt. Als einheitliche Bezeichnung für die Querschnittswerte übernehmen wir wieder das Symbol vom Vorgang 4:

$$A \rightarrow {}^1 C, \quad I_z \rightarrow {}^2 C, \quad I_y \rightarrow {}^3 C, \quad C_M \rightarrow {}^4 C \quad (1.19)$$

und können damit die folgende allgemeine Definition anschreiben

$$k_C = \int_A k_{\tilde{u}}^2 \, dA . \quad (1.20)$$

Damit erfährt die Dehnsteifigkeit EA eine Deutung als Wölbsteifigkeit bezüglich der konstanten Verwölbung und die Biegesteifigkeit EI als Wölbsteifigkeit bezüglich der linearen Verwölbung.

Durch Einsetzen von (1.12d) in (1.15) ergibt sich

$$k_W(x) = -E \int_A k_{\tilde{u}}^2(y, z) \, dA \cdot k_V''(x) \quad (1.21)$$

und mit (1.20) läßt sich nun das für alle Vorgänge gültige Elastizitätsgesetz

$$k_W(x) = -E k_C k_V''(x) \quad \text{bzw.} \quad k_V''(x) = -\frac{k_W(x)}{E k_C} \quad (1.22)$$

anschreiben. Dieses kann z.B. dazu verwendet werden, um die Längsspannungen direkt durch die Schnittgröße auszudrücken. Durch Einsetzen in (1.12d) erhalten wir

$$k_{\sigma_x}(x, y, z) = -\frac{k_W(x) k_{\tilde{u}}(y, z)}{k_C} . \quad (1.23)$$

Ein entsprechendes Gesetz läßt sich für die Schubspannungen τ_s angeben. Aus (1.22) erhalten wir $-E k_V''' = k_W' / k_C$, womit sich die Beziehung (1.12e) umformen läßt zu

$$k_{\tau_s} \cdot t = \frac{k_W'(x)}{k_C} \int_s k_{\tilde{u}}(y, z) t \, ds . \quad (1.24)$$

Differentialgleichungen

Als nächstes wollen wir für die Differentialgleichungen der Technischen Biegetheorie eine gemeinsame Deutung finden. Die einfachste Anschauung ist die als Kräfte- bzw. Momentengleichgewicht in Richtung der Koordinaten. So beschreibt die Differentialgleichung $EAu''(x) = -n(x)$ das Kräftegleichgewicht in Richtung der Stabachse, $EI_y w'''' = q_z$ das Gleichgewicht in Richtung der z -Achse usw.

Mit dieser Anschauung ist das System abgeschlossen, denn es gibt keine weiteren Richtungen, für die eine unabhängige Gleichgewichtsbedingungen gebildet werden könnte. Um eine erweiterbare Interpretation zu bekommen, müssen wir den Begriff der "virtuellen Arbeit" verwenden, was am Beispiel der Biegedifferentialgleichung vorgeführt werden soll.

Unser Ziel ist es also, die Differentialgleichung

$$EI_y w'''' = q_z \quad (1.25)$$

unter Verwendung der bisher entwickelten gemeinsamen Begriffe so allgemein zu deuten, daß diese Interpretation gleichermaßen für die andern Vorgänge gilt. Genau genommen stecken in der Gleichung (1.25) zwei Gleichgewichtsaussagen:

Zunächst wird das Gleichgewicht der in z -Richtung wirkenden Kräfte gebildet (Bild 1.6):

$$q \cdot dx + Q' \cdot dx = 0 . \quad (1.26)$$

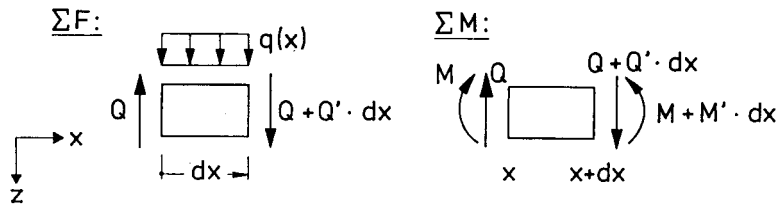


Bild 1.6 Kräfte- und Momentengleichgewicht am Element dx

Über das Momentengleichgewicht wird eine Beziehung zwischen Querkraft und Biegemoment hergestellt:

$$Q \cdot dx - M' \cdot dx = 0 . \quad (1.27)$$

Einsetzen von (1.27) in (1.26) und Einführen der Verformungsgröße $w(x)$ mittels des Elastizitätsgesetzes $M = -EIw''$ führt schließlich auf die Differentialgleichung in der Form (1.25).

Gleichgewichtsaussagen der beschriebenen Art können in Arbeitsaussagen umgewandelt werden, indem sie mit dem zugehörigen Arbeitskomplement der virtuellen Größe $\bar{1}$ multipliziert werden. An den Zahlen ändert sich dabei nichts, jedoch erhalten sie die Dimension von virtuellen Arbeiten. Beim Kräftegleichgewicht bedeutet das, daß mit einer virtuellen Verschiebung $\bar{1}$ multipliziert werden muß, beim Momentengleichgewicht mit einer virtuellen Verdrehung um den Winkel $\bar{1}$. Die zugehörigen virtuellen Verrückungszustände des Elementes dx sind in Bild 1.7 dargestellt.

Der Sinn dieser umständlich anmutenden Überlegungen wird klar, wenn wir uns an die eingangs definierten Einheitsverwölbungen (1.4) und -verschiebungen (1.5-7) erinnern.

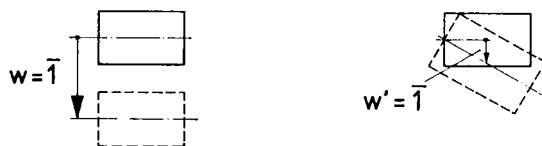


Bild 1.7 Virtuelle Verrückungen

Die erste virtuelle Verrückung $w = \bar{1}$ ist nämlich gerade die Einheitsverschiebung des Vorgangs 3, die wir durch ${}^3V(x) = \bar{1}$ beschreiben können, während beim zweiten Verrückungszustand $w' = \bar{1}$ dem Element genau die Einheitsverwölbung — entstanden durch ${}^3V'(x) = \bar{1}$ — aufgeprägt wird.

Man kann für die anderen Vorgänge in gleicher Weise zeigen, daß die Differentialgleichung aus der Arbeit an den Einheitsverformungszuständen ${}^kV = \bar{1}$ und ${}^kV' = \bar{1}$ abgeleitet werden kann. Damit sind wir bereits in der Lage, eine einheitliche Beschreibung des Aufbaus und Inhalts der Differentialgleichungen der Technischen Biegetheorie anzugeben:

Die Differentialgleichungen der Technischen Biegetheorie drücken die Forderung aus, daß die Summe der virtuellen Arbeiten am Element dx , welches einer Einheitsverschiebung ${}^kV(x) = \bar{1}$ unterworfen wird, verschwindet. Da in diesen Ausdruck die Schubspannungen eingehen, welche ja kein Elastizitätsgesetz haben und somit nicht durch die Verformungen ersetzt werden können, werden sie zunächst durch die Normalspannungen ausgedrückt. Der betreffende Zusammenhang wird durch einen zweiten virtuellen Verrückungszustand hergestellt, bei welchem dem Element durch ${}^kV'(x) = \bar{1}$ die Einheitsverwölbung des Vorgangs aufgeprägt wird.

Lasten

Die rechte Seite der Differentialgleichung, das "Lastglied", hatte bisher die Bedeutung einer Kraftkomponente bzw. Momentenwirkung. Mit dem Übergang auf virtuelle Arbeiten läßt sich auch hierfür eine gemeinsame Definition angeben:

Das Lastglied kq ist die Summe der Arbeiten der äußeren Lasten q an den Einheitsverschiebungen ${}^k\tilde{v}$ und ${}^k\tilde{w}$ des Vorgangs k .

So ist z.B. für den Vorgang 2 (Biegung um die z -Achse) das Lastglied 2q die Summe aller Arbeiten der äußeren Lasten an den Einheitsverschiebungen ${}^2\tilde{v} = 1$ und ${}^2\tilde{w} = 0$ eines Stabelementes dx , d.h. in diesem Fall ist ${}^2q = \sum(q_y \cdot 1 + q_z \cdot 0) = \sum q_y$.

Die Differentialgleichungen der Technischen Biegetheorie lauten damit in der neuen Schreibweise

$$E^k C^k V'''' = k_q . \quad (1.28)$$

Orthogonalitätsbedingungen

Als letztes wenden wir uns dem Begriff "orthogonal" zu. Die Orthogonalität der vier Vorgänge ist die Voraussetzung dafür, daß wir sie in getrennten Differentialgleichungen behandeln können. Im eingeeengten Sinn kann das so interpretiert werden, daß alle Größen in ihre Komponenten bezüglich der Stabachse, der beiden Hauptachsen und des Schubmittelpunktes zerlegt sind. Die Orthogonalisierung erfolgte historisch in drei Stufen:

1. Trennung von Längung und Biegung durch Auffinden des Schwerpunktes. Die Bedingungen dazu lauten

$$\int_A y \, dA = 0 \quad \text{und} \quad \int_A z \, dA = 0 . \quad (1.29)$$

(Verschwinden der statischen Momente).

2. Einführung der Hauptachsen. Die Biegeebenen werden orthogonal zueinander. Die zugehörige Bedingung ist das Verschwinden des Deviationsmomentes

$$\int_A yz \, dA = 0 \quad (1.30)$$

bei gleichzeitiger Erfüllung von Extremaleigenschaften durch die Trägheitsmomente.

3. Entdeckung des Schubmittelpunktes. Damit wurde der Torsionsanteil abgetrennt. Werden die Koordinaten des Schubmittelpunktes nach der Wölbkraftmethode ermittelt, so sind sie durch die drei Bedingungen

$$\int_A \omega \, dA = 0 , \quad \int_A \omega y \, dA = 0 \quad \text{und} \quad \int_A \omega z \, dA = 0 \quad (1.31a-c)$$

festgelegt.

Rein formal können wir jetzt schon eine einheitliche Darstellung der Orthogonalitätsbedingungen angeben. Ergänzen wir nämlich in (1.29) und (1.31a) jeweils einen Faktor 1, so können alle Integranden als gemischte Produkte der Einheitsverwölbungen (1.4) geschrieben werden und wir erhalten statt (1.29) bis (1.31) die eine Gleichung

$$\int_A \tilde{u}^i \tilde{u}^k \, dA = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k . \quad (1.32)$$

Diese Art der Herleitung einer einheitlichen Orthogonalitätsbedingung ist insofern nicht ganz befriedigend, da sie von formaler Natur ist und deshalb keine einheitliche Anschauung liefert. Deshalb wollen wir noch einen Weg skizzieren, bei dem auch der mechanische Inhalt deutlich wird.

Die Gleichgewichtsbedingungen haben wir oben als Arbeitsausdrücke verstanden. Dabei wurde das Element dx freigeschnitten und die Arbeit der Lasten und Schnittgrößen an den Wegen der virtuellen Verrückungen bestimmt, es wurden also die "äußeren Arbeiten" aufgestellt. Ein anderer möglicher Weg zur Herleitung ist der über die innere Arbeit der Spannungen an den Verzerrungen, welcher auf ein Integral der Form $\int_A \sigma_x \varepsilon_x dA$ führt. Sollen nach dieser Methode die Vorgänge orthogonal werden, so ist das gleichbedeutend mit der Forderung, daß die Längsspannungen, welche aus einem der Vorgänge resultieren, an den Verzerrungen aus den anderen drei Vorgängen, über den Querschnitt integriert, keine Arbeit leisten. Formal heißt das, daß die gemischten Integrale $\int_A {}^i\sigma_x \cdot {}^k\varepsilon_x dA$ verschwinden müssen. Da sowohl die Spannungen als auch die Verzerrungen proportional zu den Einheitsverwölbungen ${}^i\tilde{u}$ bzw. ${}^k\tilde{u}$ sind, führt diese Bedingung direkt auf die Gleichung (1.32). Die genaue Durchführung der skizzierten Gedanken sei dem Leser überlassen. Auch hier schließen wir wieder mit dem Hinweis auf die Erweiterbarkeit: Die Bedingungen (1.29) bis (1.31) bilden ein abgeschlossenes System, dagegen bietet es sich bei der Formulierung (1.32) an, nach weiteren Einheitsverwölbungen zu suchen, die zu den ersten vier in diesem Sinn orthogonal sind.

Alle besprochenen Größen und Beziehungen sind in ihrer speziellen sowie der verallgemeinerten Formulierung noch einmal in Tabelle 1.3 zusammengestellt.

Tabelle 1.4 enthält eine spaltenweise nach Ableitungen geordnete Darstellung der Kraft- und Weggrößen. Hier wird noch einmal das unbefriedigende Ergebnis sichtbar, daß die Größen des ersten Vorganges gegenüber den anderen drei Vorgängen um eine Spalte nach links versetzt erscheinen. Diese Unverträglichkeit läßt sich beheben, wenn, wie in Abschn. 2.9 gezeigt wird, die Starrkörperverschiebung u als Verwölbung angesehen und in der zweiten Spalte angeordnet wird.

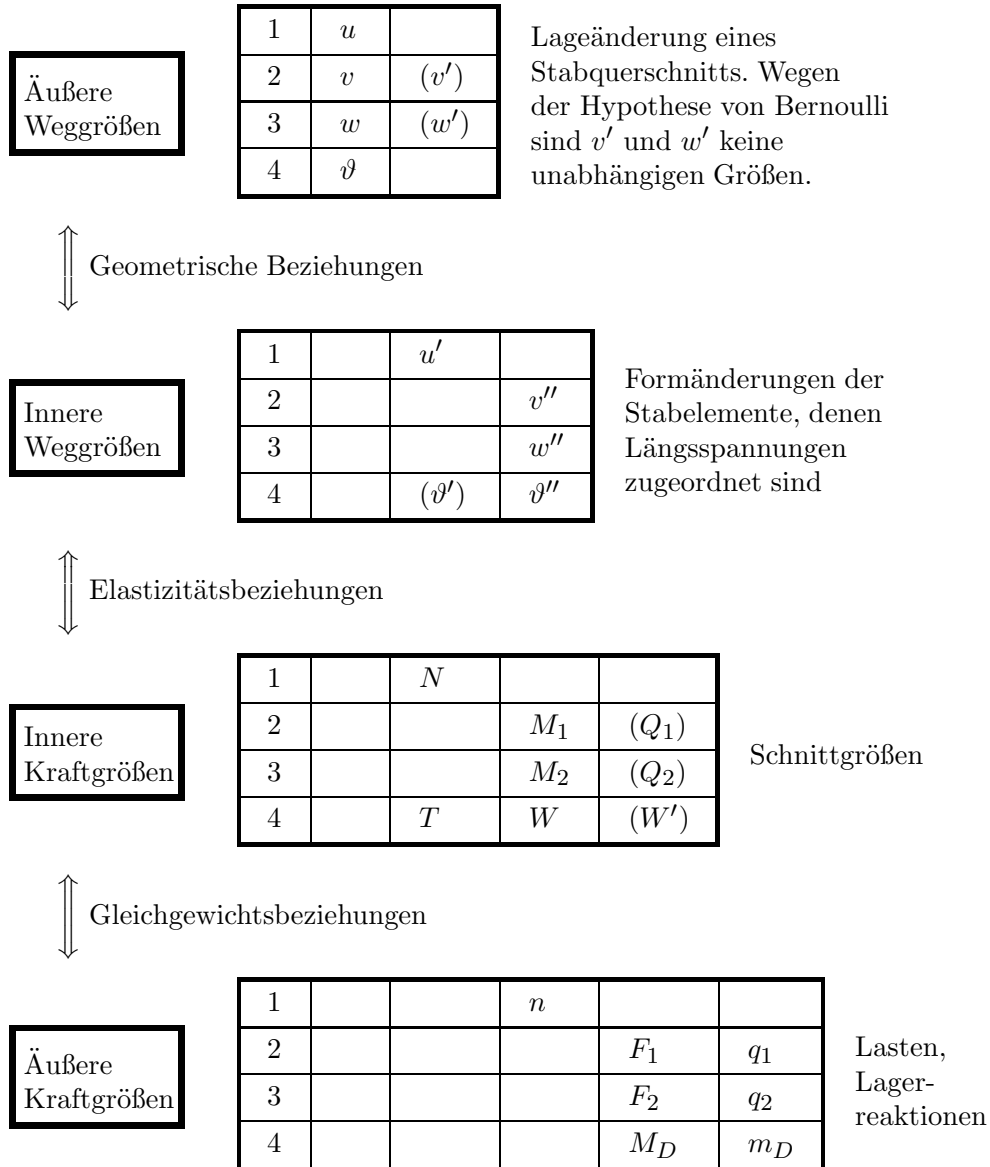
Die vorangegangenen Betrachtungen wirken auf den ersten Blick teilweise etwas umständlich, um nicht zu sagen überflüssig. Ihr Sinn liegt aber nicht darin, die leicht zu verstehenden Vorgänge der Technischen Biegetheorie zu verkomplizieren, sondern sie sollen ein Hinweis darauf sein, daß die von der VTB eingeführten höheren Verformungsvorgänge in ähnlich einfacher Weise zu deuten sind.

Tabelle 1.3 Die Größen der Technischen Biegetheorie und ihre Bezeichnung in der VTB

Vorgang	Längung	Biegung 1	
Verformung	u	v	
Einheitsverwölbung	1	$-y$	
Verwölbung	u	$u_1 = -yv'$	
Fläche	$A = \int_A dA$	–	
Statisches Moment	–	$S_1 = \int_A y dA$	
Stat. Wölbmoment	–	$R_1 = \int_A y\omega dA$	
Trägheitsmoment	–	$I_1 = \int_A y^2 dA$	
Wölbwiderstand	–	–	
Schnittgröße	$N = \int_A \sigma dA$	$M_1 = \int_A \sigma y dA$	
Elastizitätsgesetz	$N = EAu'$	$M_1 = -EI_1v''$	
Normalspannung	$\sigma_N = \frac{N}{A}$	$\sigma_1 = \frac{M_1 y}{I_1}$	
Schubspannung	–	$\tau_1(s) = \frac{Q_1 \int_0^s y dA}{I_1 t(s)}$	
Differentialgleichung	$(EAu')' = -n$	$(EI_1v'')'' = q_1$	

Biegung 2	Wölbkrafttorsion	VTB
w	ϑ	k_V
$-z$	ω	$k_{\tilde{u}}$
$u_2 = -zw'$	$u_\vartheta = \omega\vartheta'$	$k_u = k_{\tilde{u}}k_{V'}$
–	–	${}^i k_C = \int_A i_{\tilde{u}} k_{\tilde{u}} dA$
$S_2 = \int_A z dA$	–	
$R_2 = \int_A z\omega dA$	–	
$I_2 = \int_A z^2 dA$	–	${}^k k_C = {}^k k_C = \int_A k_{\tilde{u}}^2 dA$
–	$C_M = \int_A \omega^2 dA$	
$M_2 = \int_A \sigma z dA$	$W = -\int_A \sigma\omega dA$	${}^k W = -\int_A \sigma k_{\tilde{u}} dA$
$M_2 = -EI_2 w''$	$W = -EC_M \vartheta''$	${}^k W = -E {}^k C {}^k \tilde{V}''$
$\sigma_2 = \frac{M_2 z}{I_2}$	$\sigma_\vartheta = -\frac{W\omega}{C_M}$	${}^k \sigma = -\frac{{}^k W k_{\tilde{u}}}{{}^k C}$
$\tau_2(s) = \frac{Q_2 \int_0^s z dA}{I_2 t(s)}$	$\tau_\vartheta(s) = \frac{W' \int_0^s \omega dA}{C_M t(s)}$	${}^k \tau(s) = \frac{{}^k W' \int_0^s k_{\tilde{u}} dA}{{}^k C t(s)}$
$(EI_2 w'')' = q_2$	$(EC_M \vartheta'')' - (GI_D \vartheta')' = m_D$	$(E {}^k C {}^k V'')' - (G {}^k D {}^k V')' + {}^k B {}^k V = {}^k q$

Tabelle 1.4 Darstellung der vier Vorgänge mit den Bezeichnungen der Technischen Biegetheorie, spaltenweise nach der Ableitungsstufe angeordnet.



1.2.3 Zusammenhang zwischen Einheitsverwölbung und Einheitsverschiebungen

Wir haben gesehen, daß sich jedem der Vorgänge eine Einheitsverwölbung und Einheitsverschiebungen zuordnen lassen. Verwölbungen und Querschnittsverschiebungen sind Verformungen unterschiedlichen Charakters, was in ihrer Abhängigkeit von der Verformungsresultante zum Ausdruck kommt: Während die Querschnittsverschiebungen von der Verformungsresultante selbst beschrieben werden, sind die Verwölbungen von ihrer Ableitung abhängig. Das heißt, daß aus einer konstanten Verformung keine Verwölbungen entstehen, oder konkret z.B. für den Biegevorgang in z -Richtung: Erfährt der Balken eine konstante Verschiebung w , so sind damit keine Verwölbungen verbunden. Sie entstehen erst aus einer Änderung von w .

Andererseits bedeutet die Abhängigkeit von einer gemeinsamen Betonungsfunktion aber, daß ein eindeutiger Zusammenhang zwischen ihnen existieren muß. Dieser Zusammenhang kann formal auf folgende Weise hergestellt werden:

Setzen wir an einer beliebigen Stelle x die Verformungsresultante ${}^kV(x) = 0$ und ${}^kV'(x) = 1$, d.h. prägen wir dort die Einheitsverwölbung ${}^k\tilde{u}$ auf und verhindern gleichzeitig Verschiebungen in der Querschnittsebene, so ergibt sich für den Wert von kV in der Entfernung dx

$${}^kV(x + dx) = {}^kV(x) + {}^kV'(x) \cdot dx = 0 + 1 \cdot dx = dx . \quad (1.33)$$

Nehmen wir nun statt dx die Entfernung 1, so erhalten wir ${}^kV(x+1) = 1$. Das bedeutet nach (1.12b,c) aber, daß an der Stelle $x + 1$ gerade die Einheitsverschiebungen ${}^k\tilde{v}$ und ${}^k\tilde{w}$ entstehen².

Wir wollen das in einem Satz zusammenfassen:

Prägt man an einer Stelle die Einheitsverwölbung eines Vorgangs auf und verhindert an dieser Stelle Querschnittsverschiebungen, so stellt sich in der Entfernung 1 das Bild der Einheitsverschiebungen desselben Vorgangs ein.

Für die Biegung ist das in Bild 1.7 zu sehen: Die Drehung des Elements um den Winkel 1 — d.h. die Aufprägung der Einheitsverwölbung ${}^3\tilde{u}$ — erzeugt bei $x + dx$ eine Verschiebung des Querschnitts um dx nach unten. Mit einem Element der Länge 1 erhalten wir statt dx gerade die Einheitsverschiebung $w = {}^3\tilde{w} = 1$. Während in diesem Beispiel der Mechanismus noch einfach durchschaubar ist, ist der Zusammenhang bei der Torsion schon schwieriger einzusehen. Deswegen wollen wir nun aus dem formal aufgestellten Zusammenhang ein Rezept gewinnen, mit dem wir uns aus der Einheitsverwölbung die zugehörigen Einheitsverschiebungen konstruieren können:

² Die Größe 1 soll hier genau wie dx als inkrementelle Größe verstanden werden.

- Wir schneiden aus dem Balken einen Abschnitt der Länge 1 heraus (Bild 1.8 a).
- Die Scheiben denken wir uns zunächst an den Kanten freigeschnitten (Bild 1.8b).
- An jeder Scheibe wird einzeln die Verwölbung aufgebracht. Wir wollen voraussetzen, daß Schubverzerrungen und Umfangsdehnungen vernachlässigbar klein sind. Deshalb muß die Verwölbung über die Scheibe linear verlaufen und ist somit durch die Wölbordinaten an den Kanten festgelegt. Am nicht festgehaltenen Ende stellt sich außerdem eine Verschiebung in Umfangsrichtung ein, die sich zu (Bild 1.8c)

$$f_s = -\frac{\partial u}{\partial s} \quad (1.34)$$

ergibt (mit f_s wird die Verschiebung der Scheibe in lokaler s -Richtung bezeichnet und mit \tilde{f}_s die zur Einheitsverwölbung gehörende).

- Nachdem nun die Verschiebungen in Umfangsrichtung festliegen, ermitteln wir die Verschiebungen quer dazu aus der Bedingung, daß Kontinuität an den Kanten wieder hergestellt werden muß. Die Vorgehensweise dazu ist so, daß wir als Ortslinien der Kanten die Senkrechten auf die verschobenen Scheibenenden für jede Scheibe anzeichnen und die verschobene Lage der Kanten als Schnittpunkte dieser Ortslinien erhalten. Die erste und letzte Kante kann auf diese Weise nicht festgelegt werden. Sie ermitteln sich aus der Bedingung, daß die Kantenwinkel zu den angrenzenden Scheiben sich nicht ändern.
- Verbinden wir nun die verschobenen Kanten miteinander, so erhalten wir das Bild der Einheitsverschiebungen.

Zur Konstruktion der Verformungsfigur gehen wir von der perspektivischen Darstellung ab und betrachten als Beispiel den Querschnitt nach Bild 1.9a mit der eingezeichneten Wölbfunktion. Es ist die Einheitsverwölbung der Torsion. Nach dem skizzierten Vorgehen soll nun das Bild der Einheitsverschiebungen aus dieser Wölbfunktion konstruiert werden. In den Bildern 1.9b-d sind die einzelnen Schritte aufgezeichnet. Aus der Neigung der Wölbfunktion (Bild 1.9a) werden die Umfangsverschiebungen der Scheiben gemäß (1.34) berechnet. Für die erste Scheibe mit der Länge 6 ist

$$\tilde{f}_{s,1} = -\frac{(-19,2) - 62,4}{6} = 13,6 . \quad (1.35)$$

Für die zweite Scheibe folgt entsprechend $\tilde{f}_{s,2} = -1,6$. Damit können aus Symmetriegründen auch die Umfangsverschiebungen der restlichen beiden Scheiben angegeben werden und die verschobenen Scheiben mit den Ortslinien eingezeichnet werden (Bild 1.9b). Durch Verbinden der Schnittpunkte

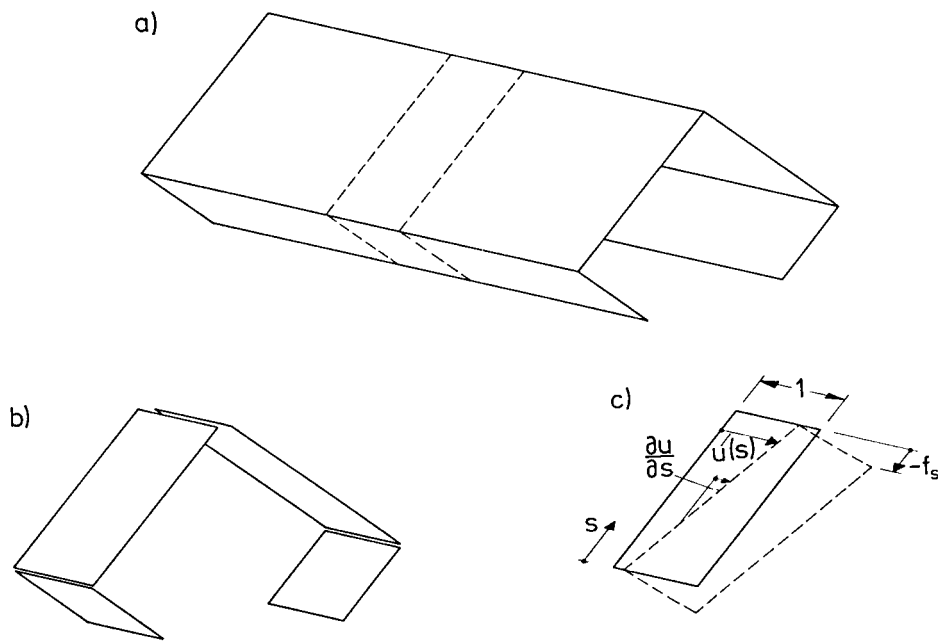


Bild 1.8 Freischneiden des Stabelements (a), der Kanten (b) und Aufbringen der Verwölbung (c) (für eine Scheibe)

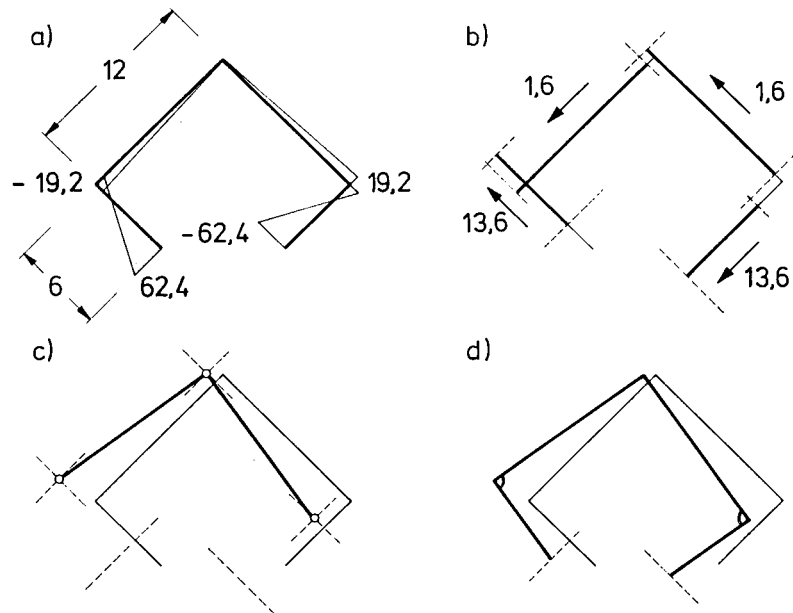


Bild 1.9 Konstruktion der Einheitsverschiebungen (d) aus der Einheitsverwölbung (a)

erhalten wir die neue Lage zunächst für die inneren Scheiben (Bild 1.9c). Die Lage der Randscheiben ist durch ihre Kontingenzwinkel festgelegt (Bild 1.9d). So ergibt sich aus der Einheitsverwölbung der Torsion das bekannte Bild der Einheitsverdrehung.

Bei der Aufstellung dieses Rezeptes steht natürlich nicht die Absicht im Vordergrund, bereits bekannte Bilder zu rekonstruieren, sondern es geht darum, eine generelle Handhabe zu bekommen, um zu einer beliebigen Einheitsverwölbung die zugehörigen Einheitsverschiebungen ermitteln zu können.

1.3 Das System der Verallgemeinerten Technischen Biegetheorie

Wir haben nun eine Anschauung von den vier Vorgängen der Technischen Biegetheorie gewonnen, die diese in eine gemeinsame Reihe stellt und alle verengten Begriffe und Definitionen durch verallgemeinerbare ersetzt. Damit wurde die Vorbereitung getroffen, um in diesem Abschnitt den ersten Schritt über die Grenzen der Technischen Biegetheorie zu tun. Dieser stellt nämlich lediglich eine Fortsetzung dieser Reihe dar.

Wir setzen also $k = 5$ und suchen eine Wölbfunktion ${}^5\tilde{w}$, welche zu den anderen im Sinne der Gleichung (1.32) orthogonal ist. Zu dieser Einheitsverwölbung können nach Abschnitt 1.2.3 die Einheitsverschiebungen ${}^5\tilde{v}$ und ${}^5\tilde{w}$ ermittelt werden. Da die Starrkörperverschiebungen des Querschnitts mit den ersten vier Vorgängen ausgeschöpft sind, kann man jetzt bereits sagen, daß ${}^5\tilde{v}$ und ${}^5\tilde{w}$ eine Profilverformung beschreiben müssen.

Die Verformungresultante ${}^5V(x)$ erhalten wir als Lösung der Differentialgleichung (1.28) für $k = 5$:

$$E {}^5C {}^5V'''' = {}^5q . \quad (1.36)$$

Um diese Gleichung aufstellen zu können, benötigen wir den Wölbwiderstand 5C , welcher nach (1.20) berechnet wird, sowie das Lastglied 5q , das aus der Arbeit der Lastkomponenten an den Einheitsverschiebungen ${}^5\tilde{v}$ und ${}^5\tilde{w}$ gebildet wird. Die Lösung der Differentialgleichung kann mit den bekannten Methoden und Formeln der Balkentheorie erfolgen. Wir können z.B. bei Gleichstreckenlast und gelenkiger Lagerung die Schnittgröße 5W in Feldmitte aus der Formel

$${}^5W(l/2) = \frac{{}^5ql^2}{8} \quad (1.37)$$

ermitteln, woraus sich dann die Längsspannungen nach (1.23) berechnen. Entsprechend gilt für die Verformung in Feldmitte

$${}^5V(l/2) = \frac{5}{384} \frac{{}^5ql^4}{E {}^5C} . \quad (1.38)$$

Neu ist allerdings, daß die Funktion ${}^5V(x)$ keine direkte Aussage über die Verformungen erlaubt, sondern erst durch Einsetzen in die Produktdarstellungen (1.12a-c) zu unmittelbar anschaulichen Größen führt.

Der Schubfluß ist nach der Formel (1.9) zu erhalten. Durch Integration über s erhält man die Schubkräfte. Diese dürfen keine Resultierende besitzen und müssen demnach eine Gleichgewichtsgruppe bilden.

Für die vollständige Lösung sind die Spannungen und Verformungen aus $k = 5$ denen aus den anderen Verformungsvorgängen zu überlagern.

In gleicher Weise ist es denkbar, für $k = 6, 7, \dots$ weitere Verformungsvorgänge zu finden und die zugehörigen Gleichungen aufzustellen.

Wir haben nun durch einfache Fortführung der Reihe eine Vorstellung von den zu erwartenden Beziehungen gewonnen, indem wir die Beziehungen des letzten Abschnittes einfach auf einen neuen Verformungsvorgang anwendeten.

Zwei Aspekte wurden dabei bis jetzt außer acht gelassen. Der eine betrifft die Frage nach den an der Tragwirkung beteiligten Verformungen. Bei den vier Vorgängen der Technischen Biegetheorie hatten wir festgestellt, daß die gesamte elastische Energie in den Verzerrungen der Längsfasern gespeichert wird. Die neu hinzukommenden Verformungszustände können nun aber keine Starrkörperbewegungen des Querschnitts mehr sein, sondern sie müssen mit Profilverformungen verbunden sein. Das bedeutet aber, daß nun auch andere Verformungsanteile einbezogen sein müssen, nämlich die aus den Biegemomenten in Umfangsrichtung und aus den Drillmomenten. Da diese Anteile sich in der Differentialgleichung durch zusätzliche Terme bemerkbar machen müssen, können wir (1.36) zunächst nur als Spezialfall einer allgemeineren Gleichung ansehen, bei dem die neuen Anteile vernachlässigt sind. Der Drillanteil ist uns bereits früher begegnet, ohne daß wir darauf näher eingegangen sind. Bei der Torsion erfahren die Querschnittsteile ja eine Verdrillung, die sich durch einen Term $GI_D\vartheta''$ in der Differentialgleichung äußert (vgl. Tabelle 1.3). Dies legt die Vermutung nahe, daß auch für alle weiteren Verformungszustände die Verdrillung über einen Term zweiter Ordnung in die Differentialgleichung eingeht. Im zweiten Kapitel wird sich das bestätigen, wir wollen hier jedoch nicht näher darauf eingehen.

Der andere bis jetzt noch nicht beachtete Aspekt ist die Frage, wieviele zusätzliche Verformungszustände es überhaupt gibt und wodurch ihre Anzahl festgelegt wird. Dieser Frage wollen wir im nächsten Abschnitt nachgehen.

1.3.1 Die Wölbfreiheitsgrade als Reihengesetz

Setzt man die Schubverzerrung in der Mittelfläche eines dünnwandigen offenen Querschnitts näherungsweise null, so muß die Wölbfunktion in den geraden Elementen (Scheiben) des Querschnitts linear verlaufen. Die Anzahl der Freiheitsgrade für eine Wölbfunktion ist demnach gleich der Anzahl der

Knoten des Querschnitts, wobei Anfangs- und Endpunkt sowie die Ecken eines polygonförmigen Querschnitts Knoten darstellen. Man kann so mit den einzelnen Vorgängen folgende Reihe bilden (wobei mit u_r die Verwölbung am r -ten Knoten bezeichnet wird):

1. Der Punkt-Querschnitt idealisiert die Querschnittsfläche im Schwerpunkt. Er hat nur eine Dehnsteifigkeit entsprechend dem einzigen Wölbfreiheitsgrad u_1 .
2. Der Ein-Scheiben-Querschnitt hat mit u_1 und u_2 zwei Freiheitsgrade und kann mit $u_1 = 1, u_2 = 1$ die Längung und mit $u_1 = 1, u_2 = -1$ einen Biegevorgang beschreiben.
3. Der Zwei-Scheiben-Querschnitt hat mit u_1, u_2 und u_3 drei Freiheitsgrade. Ein zweiter Biegevorgang kommt hinzu.
4. Der Drei-Scheiben-Querschnitt läßt auch noch die zur Verdrillung gehörende Verwölbung zu.

Man könnte die Reihe hier abbrechen, weil damit alle Starrkörperverschiebungen des Querschnitts erfaßt sind und die bei Querschnitten mit mehr als drei Scheiben zusätzlichen Wölbordinaten als von den ersten vier abhängig ansehen. Man kann aber auch die Reihe fortsetzen:

5. Der Vier-Scheiben-Querschnitt hat 5 Freiheitsgrade in den Wölbordinaten. Zusätzlich zu den vier Einheitsverwölbungen, die zu den Starrkörperverschiebungen gehören, läßt sich eine 5. Wölbfunktion angeben, die zu den vier vorausgehenden orthogonal im Sinne der Gleichung (1.32) ist und damit in der Form festliegt. Die Amplitude kann frei gewählt werden. Nach Abschnitt 1.2.3 läßt sich dazu ein Querschnittsverschiebungsbild ermitteln.

In Bild 1.10 ist diese Reihenbildung in Matrixform schematisch dargestellt. Auf der Hauptdiagonalen, von links oben nach rechts unten fortschreitend, findet man die Querschnitte mit jeweils einem zusätzlichen Freiheitsgrad für die Verwölbung und ihre konstante Wölbfunktion. Die Spalten über der Hauptdiagonalen zeigen die weiteren orthogonalen Wölbfunktionen des Querschnitts, die Zeilen vor der Hauptdiagonalen die weiteren orthogonalen Lageänderungen des Querschnitts, und zwar in den beiden benachbarten Streifen die Biegung und im dritten die Torsion. Die Anordnung der konstanten Verwölbung auf der Hauptdiagonalen entspricht dem Doppelcharakter dieser Verformung sowohl als Starrkörperverschiebung in x -Richtung als auch als Verwölbung, was sich schon in Abschn. 1.2 gezeigt hat und in Abschn. 2.9.1 geklärt wird.

Durch Fortsetzung der betrachteten Reihe erhalten wir die allgemeine Aussage: Der offene, dünnwandige n -Scheiben-Querschnitt besitzt $n + 1$ linear unabhängige Wölbfunktionen. Da jeder dieser Wölbfunktionen ein Verformungsvorgang in der zuvor beschriebenen Weise zugeordnet werden kann, stellen wir fest: Der n -Scheiben-Querschnitt besitzt neben den vier

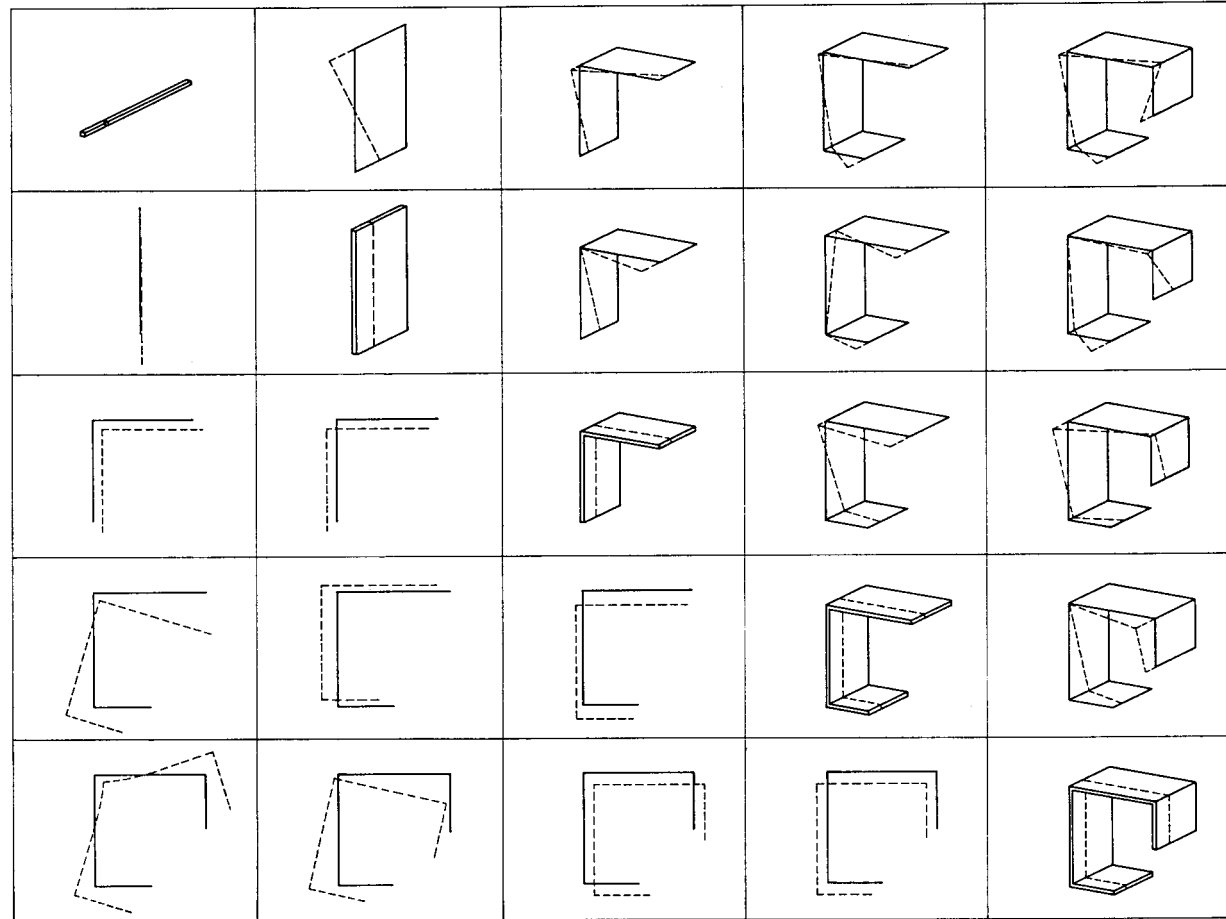


Bild 1.10 Wölbfunktionen und Verformungen von Querschnitten mit zunehmender Knotenzahl

Starrkörperzuständen noch $n - 3$ weitere Verformungszustände, welche die Profilverformungen beschreiben.

In zweifacher Hinsicht hat nun die Wölbfunktion eine entscheidende Bedeutung erlangt. In Abschn. 1.2 entpuppte sie sich als Schlüsselbegriff, durch den sämtliche bereits bekannten Definitionen und Formeln auf einheitliche Weise geschrieben und verstanden werden konnten. In dem jetzigen Abschnitt zeigte sich außerdem, daß sie das Argument für die Erweiterung des Systems liefert. Sie ist somit aus der Sicht der VTB zur konstituierenden Größe geworden. Während sich die vier Vorgänge der Technischen Biegetheorie auf den Starrkörperbewegungen des Querschnitts gründen und die Verwölbungen dort nur als sekundäre Effekte verstanden werden, kehrt sich die Blickrichtung bei der VTB um. Hier bildet die Wölbfunktion die Grundlage zur Einführung und Beschreibung der neuen Verformungsvorgänge, aus der sich dann die zugehörigen Verformungsbilder ergeben. Die Umkehrung der Blickrichtung wird in Tabelle 1.5 schematisch verdeutlicht.

Tabelle 1.5 Definition von Verformung und Verwölbung in der Technischen Biegetheorie und in der VTB

Vor- gang	Ver- formung	Def.	Verwölbung	Name
1			u	Längung
2	v	\implies	$-y = u(v' = 1)$	Biegung 1
3	w	\implies	$-z = u(w' = 1)$	Biegung 2
4	ϑ	\implies	$\omega = u(\vartheta' = 1)$	Torsion
Erweiterung \Downarrow				
5	5V	\Leftarrow	${}^5\tilde{u} = u({}^5V' = 1)$	Profil- verformungen
\vdots				
k	kV	\Leftarrow	${}^k\tilde{u} = u({}^kV' = 1)$	
\vdots				
$n + 1$	${}^{n+1}V$	\Leftarrow	${}^{n+1}\tilde{u} = u({}^{n+1}V' = 1)$	

1.3.2 Einführendes Beispiel mit fünf Wölbfreiheitsgraden

Die bisher gewonnenen Vorstellungen und die neue Bezeichnungsweise sollen an einem einfachen Rechenbeispiel gefestigt werden. Wir betrachten den Vier–Scheiben–Querschnitt mit konstanter Dicke t nach Bild 1.11a. Die vier orthogonalen Wölbfunktionen der Technischen Biegetheorie sind in Bild 1.11b bis 1.11e aufgezeichnet.

Die Erweiterung beginnt mit der Ermittlung der Einheitsverwölbung ${}^5\tilde{u}$, die zu den anderen Einheitsverwölbungen orthogonal sein muß. Durch einige Vorüberlegungen kann die Aufgabe vereinfacht werden. Wegen der Symmetrie des Querschnitts sind die Wölbfunktionen entweder symmetrisch oder antisymmetrisch. Für die antisymmetrischen Wölbfunktionen verschwindet die Ordinate \tilde{u}_3 auf der Symmetrieachse. Daher sind nur zwei unabhängige antisymmetrische Wölbfunktionen möglich, die zur Biegung um die vertikale z –Achse (${}^2\tilde{u}$) und die zur Wölbkrafttorsion (${}^4\tilde{u}$) gehörenden. Die gesuchte neue Wölbfunktion ${}^5\tilde{u}$ muß also symmetrisch sein. Sie hat damit schon vorweg die Orthogonalitätseigenschaften

$$\int_A {}^2\tilde{u} {}^5\tilde{u} \, dA = 0 \quad (1.39)$$

$$\text{und } \int_A {}^4\tilde{u} {}^5\tilde{u} \, dA = 0 . \quad (1.40)$$

Aus den verbleibenden Bedingungen

$$\int_A {}^1\tilde{u} {}^5\tilde{u} \, dA = 0 \quad (1.41)$$

$$\text{und } \int_A {}^3\tilde{u} {}^5\tilde{u} \, dA = 0 \quad (1.42)$$

können die Verhältnisse ${}^5\tilde{u}_2/{}^5\tilde{u}_1$ und ${}^5\tilde{u}_3/{}^5\tilde{u}_1$ und damit die Form der Einheitsverwölbung ${}^5\tilde{u}$ bestimmt werden. Um auf Absolutwerte zu kommen, kann eine Wölbordinate beliebig vorgegeben werden. Dieser Normierungsfaktor ist wegen des Produktansatzes frei wählbar. Hier erfolgt die Normierung so, daß die betragsgrößte Ordinate gleich eins gesetzt wird.

Die beiden Integrale (1.41) und (1.42) ergeben:

$$(-1) \frac{{}^5\tilde{u}_1 + {}^5\tilde{u}_2}{2} \cdot 0,3 \cdot 6 + (-1) \frac{{}^5\tilde{u}_2 + {}^5\tilde{u}_3}{2} \cdot 0,3 \cdot 12 = 0 ,$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left(2 \left((-6, 364) {}^5\tilde{u}_1 + (-2, 121) {}^5\tilde{u}_2 \right) + (-2, 121) {}^5\tilde{u}_1 + (-6, 364) {}^5\tilde{u}_2 \right) 0,3 \cdot 6 \\ & + \frac{1}{6} \left(2 \left((-2, 121) {}^5\tilde{u}_2 + 6, 364 {}^5\tilde{u}_3 \right) + 6, 364 {}^5\tilde{u}_2 + (-2, 121) {}^5\tilde{u}_3 \right) 0,3 \cdot 12 = 0 . \end{aligned}$$

□ ≙ Knoten r
 ○ ≙ Scheibe r

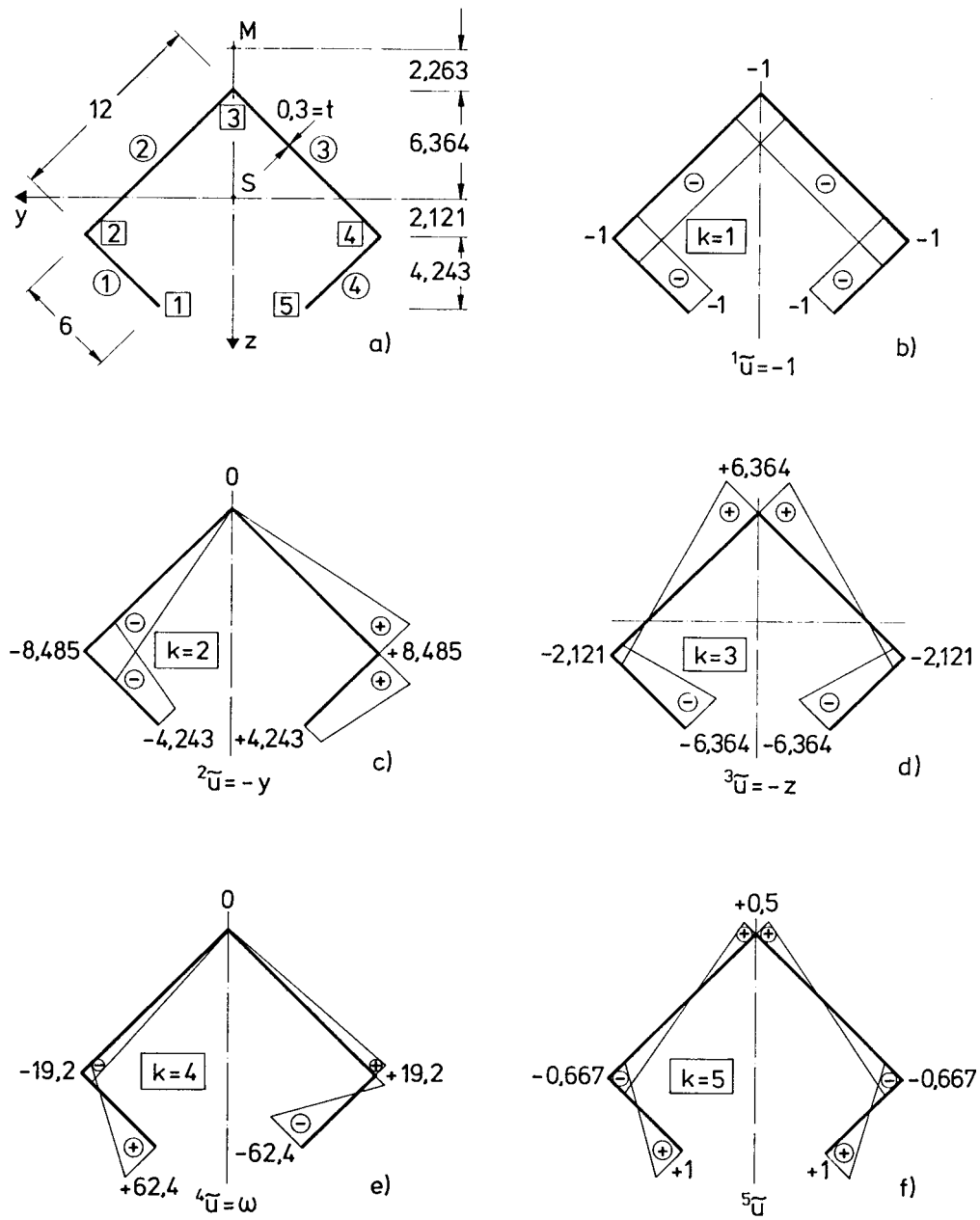


Bild 1.11 Vier-Scheiben-Querschnitt (a) mit orthogonalen Wölbfunktionen ${}^k\tilde{u}$ in den Bildern (b) - (f). Querschnittsabmessungen und Wölbordinaten in cm.

Daraus erhält man ${}^5\tilde{u}_2$ und ${}^5\tilde{u}_3$ in Abhängigkeit von ${}^5\tilde{u}_1$:

$$\begin{aligned} 2,700 \cdot {}^5\tilde{u}_2 + 1,800 \cdot {}^5\tilde{u}_3 &= -0,900 \cdot {}^5\tilde{u}_1, \\ 1,909 \cdot {}^5\tilde{u}_2 - 6,364 \cdot {}^5\tilde{u}_3 &= -4,455 \cdot {}^5\tilde{u}_1. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Nach Lösung der beiden linearen Gleichungen (1.43) und Normierung auf ${}^5\tilde{u}_1 = 1$ (betragsgrößte Ordinate) erhält man die in Bild 1.11f angegebene Wölbfunktion mit den Ordinaten

$$\begin{aligned} {}^5\tilde{u}_1 &= 1,000 \text{ cm}, \\ {}^5\tilde{u}_2 &= -0,667 \text{ cm}, \\ {}^5\tilde{u}_3 &= 0,500 \text{ cm}, \\ {}^5\tilde{u}_4 &= -0,667 \text{ cm}, \\ {}^5\tilde{u}_5 &= 1,000 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Diese neue Einheitsverwölbung können wir nun in die verallgemeinerten Definitionen und Formeln einsetzen und erhalten auf diese Weise alle zum Vorgang 5 gehörenden Größen.

Zuerst berechnen wir mit (1.20) den Wölbwiderstand

$$\begin{aligned} {}^5C &= \int_A {}^5\tilde{u}^2 \cdot dA \\ &= \frac{2}{3} \left(1^2 + (-0,667)^2 + 1(-0,667) \right) 6 \cdot 0,3 \\ &\quad + \frac{2}{3} \left((-0,667)^2 + 0,5^2 + 0,5(-0,667) \right) 12 \cdot 0,3 \\ &= 1,800 \text{ cm}^4. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Bei entsprechender Berechnung erhalten wir für die ersten 4 Vorgänge

$$\begin{aligned} {}^1C &= 10,80 \text{ cm}^4, \\ {}^2C &= 324,00 \text{ cm}^4, \\ {}^3C &= 145,80 \text{ cm}^4, \\ {}^4C &= 4561,92 \text{ cm}^4. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Das sind gemäß (1.19) die Fläche, die zwei Hauptträgheitsmomente und der Wölbwiderstand des Querschnitts. Auffallend ist, daß nicht nur die Bezeichnungsweise mit kC vereinheitlicht ist, sondern daß auch alle Wölbwiderstände dieselbe Dimension haben. An dieser Stelle sei nur auf die zunächst ungewohnte Dimensionsgebung hingewiesen. In Abschn. 2.9.4 wird sie begründet und ist

dann, wenn der Leser mit der VTB schon etwas vertrauter ist, leichter zu verstehen. Wesentlich ist, daß alle Einheitswölbfunktionen $k_{\tilde{u}}$ die einheitliche Dimension "Länge" haben.

Als nächstes berechnen wir mit (1.24) die Einheitsschubflüsse

$$k_{\tau_s}(s) \cdot t(s) = \frac{1}{k_C} \int_0^s k_{\tilde{u}}(s) \cdot t(s) ds \quad \text{für } k_{W'} = 1 \quad (1.47)$$

und daraus durch Integration vom Knoten r zum Knoten $r + 1$ die Einheitsschubkräfte S_r aller Scheiben r :

$$k_{S_r} = \int_r^{r+1} k_{\tau_s}(s) \cdot t(s) ds \quad \text{für } k_{W'} = 1. \quad (1.48)$$

Die Ergebnisse der Berechnung sind in Bild 1.12 dargestellt.

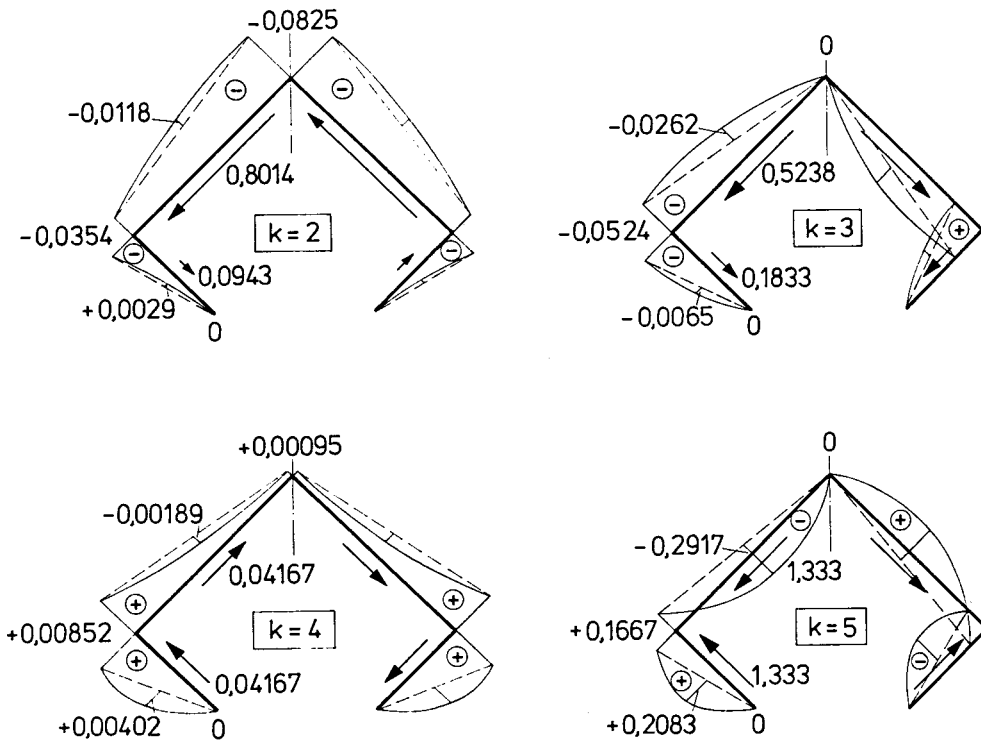


Bild 1.12 Einheitsfluss $k_{\tau_s} \cdot t$ (in 1/cm) und Einheitsschubkräfte k_{S_r} (dimensionlos) des Vier-Scheiben-Querschnitts

Beispielsweise berechnet sich der Einheitsschubfluß im Vorgang 5 am zweiten Knoten mit (1.47) zu

$${}^5\tau_s(s = 6 \text{ cm}) \cdot t = \frac{1}{1,8} \cdot \frac{1 - 0,667}{2} \cdot 0,3 \cdot 6 = 0,1667/\text{cm} ,$$

und der Parabelstich des quadratischen Anteils in Scheibenmitte beträgt:

$${}^5\tau_s(s = 3 \text{ cm}) \cdot t = \frac{1}{1,8} \cdot \frac{1 - (-0,667)}{8} \cdot 0,3 \cdot 6 = 0,2083/\text{cm} .$$

Durch Integration über die Scheibe 1 erhalten wir mit (1.48) die zugehörige Einheitsschubkraft

$${}^5S_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,1667 + \frac{2}{3} \cdot 0,2083 \right) \cdot 6 = 1,333 .$$

Bilden wir schließlich noch die Resultierende der Einheitsschubkräfte pro Vorgang, so werden wir feststellen, daß wir für $k = 2$ bis 4 die Größe ${}^k W' = 1$ erhalten und daß die Schubkräfte des 5. Vorgangs ein Gleichgewichtssystem bilden.

Die Einheitsverschiebungen ${}^k \tilde{v}$ und ${}^k \tilde{w}$ wollen wir als nächstes ermitteln. Für die vier Starrkörperzustände ist das sehr einfach. So ist zum Beispiel nach Gleichung (1.6) im Vorgang $k = 3$ für alle Knoten r

$${}^3 \tilde{v}_r = 0 \quad \text{und} \quad {}^3 \tilde{w}_r = 1 . \quad (1.49)$$

Das Einheitsverschiebungsbild des fünften Vorgangs kann, wie im Abschn. 1.2.3 dargestellt, aus der Einheitsverwölbung ${}^5 \tilde{u}$ ermittelt werden. Wegen der Symmetrie reicht es für die eindeutige Angabe der entstehenden Verformungsfigur aus, die Umfangsverschiebungen $\tilde{f}_{s,r}$ der ersten und zweiten Scheibe ($r = 1$ und $r = 2$) zahlenmäßig zu ermitteln. Mit der Beziehung (1.34) erhalten wir aus der Wölbfunktion des Bildes 1.11f die dimensionslosen Umfangsverschiebungen

$$\begin{aligned} {}^5 \tilde{f}_{s,1} &= \frac{-(-0,667 - 1,000)}{6} = 0,2778 , \\ {}^5 \tilde{f}_{s,2} &= \frac{-(0,500 + 0,667)}{12} = -0,0972 . \end{aligned} \quad (1.50)$$

Aus den Schnittpunkten der Ortslinien sind die Verschiebungen der Knoten 2 bis 4 sofort bestimmbar:

$$\begin{aligned} {}^5 \tilde{v}_2 &= - {}^5 \tilde{v}_4 = (0,0972 + 0,2778) \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,2652 , \\ {}^5 \tilde{w}_2 &= {}^5 \tilde{w}_4 = (0,0972 - 0,2778) \frac{1}{\sqrt{2}} = -0,1277 , \\ {}^5 \tilde{v}_3 &= 0 , \\ {}^5 \tilde{w}_3 &= 0,0972 \cdot \sqrt{2} = 0,1375 . \end{aligned} \quad (1.51)$$

Wenn wir den Balken zunächst als Gelenkfaltwerk ansehen wollen und dazu am Knoten 3 ein Gelenk annehmen, dann ergibt sich die in Bild 1.13 dargestellte Einheitsverschiebungsfigur, bei der alle Scheiben in der Querschnittsebene als Geraden abgebildet werden und am gelenkigen Knoten 3 eine gegenseitige Verdrehung der beiden benachbarten Scheiben 2 und 3 auftritt.

Die Verdrehung der Scheibe 2 ist

$${}^5\tilde{f}_{\vartheta,2} = \frac{0,2778 + 0,0972}{12} = 0,0313/\text{cm} . \quad (1.52)$$

Da am Knoten 2 keine gegenseitige Verdrehung auftritt, können wir mit Hilfe der Bedingung ${}^5\tilde{f}_{\vartheta,1} = {}^5\tilde{f}_{\vartheta,2}$ die Verschiebung des Knotens 1 und aufgrund der Symmetrie auch die des Knotens 5 ermitteln:

$$\begin{aligned} {}^5\tilde{v}_1 &= - {}^5\tilde{v}_5 = 0,2652 + 0,0313 \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = 0,3977 , \\ {}^5\tilde{w}_1 &= {}^5\tilde{w}_5 = -0,1277 + 0,0313 \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = 0,0049 . \end{aligned} \quad (1.53)$$

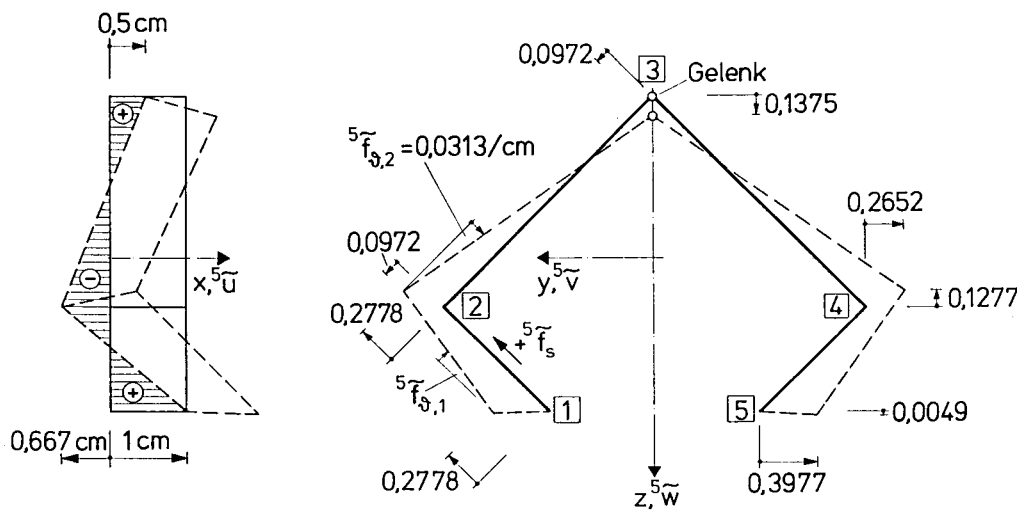


Bild 1.13 Zusammenhang zwischen der Einheitsverwölbung ${}^5\tilde{u}$ und der Einheitsverformung ${}^5V = 1$ beim Gelenkfaltwerk

Es seien zunächst nur Lasten zugelassen, die in der Querschnittsebene wirken und an den Innenknoten angreifen.

Während bei der Technischen Biegetheorie nur Größe und Wirkungslinie der Lastresultierenden interessieren, ist jetzt auch die Anordnung der einzelnen Lasten im Querschnitt von Bedeutung. Die Lastglieder kq sind die Arbeit, welche die Knotenlastkomponenten $q_{y,r}$ und $q_{z,r}$ an den Knotenverschiebungen ${}^k\tilde{v}_r$ und ${}^k\tilde{w}_r$ des Einheitszustandes ${}^kV = 1$ leisten:

$${}^kq = \sum_{r=1}^{n+1} (q_{y,r} {}^k\tilde{v}_r + q_{z,r} {}^k\tilde{w}_r) . \quad (1.54)$$

Zur Durchführung einer Berechnung müssen wir einen konkreten Lastfall vorgeben: Der Balken mit dem Querschnitt aus Bild 1.11a habe die Länge $l = 120 \text{ cm}$, sei gelenkig gelagert und am Knoten 3 mit einer vertikalen konstanten Streckenlast $q_{z,3} = q = 0,10 \text{ kN/cm}$ belastet (Bild 1.14). Der Werkstoff sei Stahl mit einem Elastizitätsmodul $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ und der Querdehnungszahl $\mu = 0,3$.

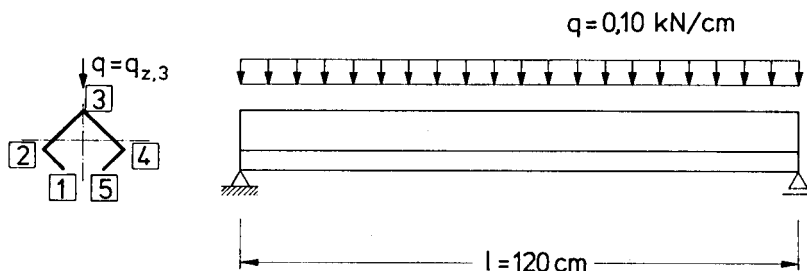


Bild 1.14 Statisches System und Belastung des Beispiels

Wegen der Symmetrie des Querschnitts und der Lastanordnung kommen nur die Vorgänge $k = 3$ und $k = 5$ in Betracht (${}^1q = {}^2q = {}^4q = 0$). Nach (1.54) und mit den Werten ${}^k\tilde{w}_3$ aus (1.49) und (1.51) werden die Lastglieder

$$\begin{aligned} {}^3q &= q \cdot {}^3\tilde{w}_3 = q , \\ {}^5q &= q \cdot {}^5\tilde{w}_3 = 0,1375 q . \end{aligned}$$

Wir sind nun in der Lage, die Differentialgleichung des fünften Vorgangs

$$E {}^5C {}^5V'''' = {}^5q$$

in Zahlen aufzuschreiben. Wie in Abschn. 1.3 dargelegt, sind in dieser einfachen Form der Differentialgleichung die durch die Profilverformung

entstehenden Umfangsbiegemomente nicht berücksichtigt. Wir können das durch die Annahme eines Gelenkes an der mittleren Kante rechtfertigen. Dies entspricht dem Vorgehen der Gelenkfaltwerkstheorie. Die Randbedingungen sind wie in der Technischen Biegetheorie zu behandeln. Gelenkige Lagerung z.B. bedeutet, daß die Verformung kV und die Schnittgröße kW am Lager verschwinden. Damit können die aus der Technischen Biegetheorie bekannten Lösungsmethoden und -formeln auch auf diesen Vorgang angewendet werden.

Für die Schnittgrößen in Feldmitte gilt bei gelenkiger Lagerung und Gleichstreckenlast allgemein

$${}^kW(l/2) = \frac{{}^kql^2}{8} .$$

Damit werden

$$\begin{aligned} {}^3W(l/2) &= \frac{{}^3ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8} = 180,0 \text{ kNcm} , \\ {}^5W(l/2) &= \frac{{}^5ql^2}{8} = \frac{0,1375 ql^2}{8} = 24,75 \text{ kNcm} . \end{aligned}$$

Die Schnittgröße 3W ist das Biegemoment um die horizontale Hauptachse y .

Die Längsspannungen σ_x in Feldmitte für die Vorgänge 3 und 5 sowie ihre Überlagerung sind in Tabelle 1.6 zusammengestellt. Sie errechnen sich nach (1.23).

Das Ergebnis ist dasselbe, das man mit der Gelenkfaltwerkstheorie erhalten würde (z.B.[17]). Die Amplitude des Spannungsbildes (Bild 1.15) ändert sich quadratisch mit der Länge l , das Bild selbst bleibt erhalten.

Für die Verformungsergebnisse kV gilt bei gelenkiger Lagerung und Gleichstreckenlast allgemein

$${}^kV(l/2) = \frac{5}{384} \frac{{}^kql^4}{E^kC} .$$

Somit werden

$$\begin{aligned} {}^3V(l/2) &= \frac{5}{384} \frac{{}^3ql^4}{E^3C} = 0,0882 \text{ cm} , \\ {}^5V(l/2) &= \frac{5}{384} \frac{{}^5ql^4}{E^5C} = 0,9821 \text{ cm} . \end{aligned}$$

Die nach (1.12b-c) berechneten Verschiebungen der Kanten in Feldmitte sind in den Tabellen 1.7 und 1.8 zusammengestellt.

Auch das Verformungsbild ändert sich beim Gelenkfaltwerk nicht. Seine Amplitude steigt wie bei der Biegung mit der 4. Potenz der Länge.

Tabelle 1.6 Längsspannungen des Gelenkfaltwerks in Feldmitte in kN/cm²

Knoten $r =$	1	2	3	4	5
${}^3\sigma_{x,r}$	7,86	2,62	-7,86	2,62	7,86
${}^5\sigma_{x,r}$	-13,75	9,17	-6,87	9,17	-13,75
$\sigma_{x,r} = {}^3\sigma_{x,r} + {}^5\sigma_{x,r}$	-5,89	11,79	-14,73	11,79	-5,89

Tabelle 1.7 Knotenverschiebungen v des Gelenkfaltwerks in Feldmitte in cm

Knoten $r =$	1	2	3	4	5
3v_r	0	0	0	0	0
5v_r	0,391	0,260	0,00	-0,260	-0,391
$v_r = {}^3v_r + {}^5v_r$	0,391	0,260	0,00	-0,260	-0,391

Tabelle 1.8 Knotenverschiebungen w des Gelenkfaltwerks in Feldmitte in cm

Knoten $r =$	1	2	3	4	5
3w_r	0,088	0,088	0,088	0,088	0,088
5w_r	0,005	-0,125	0,135	-0,125	0,005
$w_r = {}^3w_r + {}^5w_r$	0,093	-0,037	0,223	-0,037	0,093

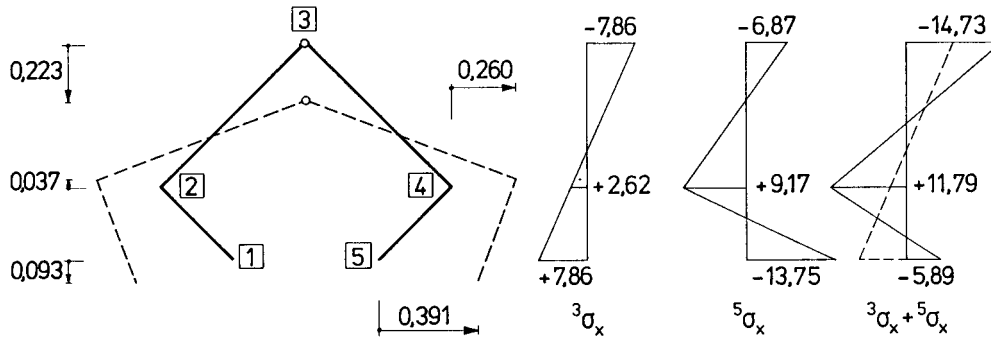


Bild 1.15 Verschiebungen (in cm) und Längsspannungen (in kN/cm²) des Gelenkfaltwerks in Feldmitte nach den Tabellen 1.6 bis 1.8

Nun wollen wir die vereinfachende Annahme eines Gelenkes an der Kante 3 aufgeben und sie statt dessen als biegesteif betrachten. Dadurch erhalten wir einen zusätzlichen Term in der Differentialgleichung, dessen Herleitung hier kurz skizziert werden soll.

Durch das Gelenk war eine gegenseitige Tangentenverdrehung der Scheiben am Knoten 3 zugelassen, so daß das Verformungsbild ${}^5V = 1$ ohne Querkrümmungen der Scheiben auskam (Bild 1.13).

Da die Einheitsverwölbungen (1.44) und die zugehörigen Scheibenumfangsverschiebungen (1.50) unabhängig von der Annahme eines Gelenkes oder einer biegesteifen Kante sind, ist auch die Sehnensfigur der Scheiben 2 und 3 in beiden Fällen dieselbe. Am Knoten 3 des biegesteifen Querschnitts muß jedoch der ursprüngliche rechte Winkel erhalten bleiben, so daß die Scheiben 2 und 3 in Querrichtung gekrümmt sein müssen. Es entsteht die im Bild 1.16 dargestellte Einheitsverformungsfigur.

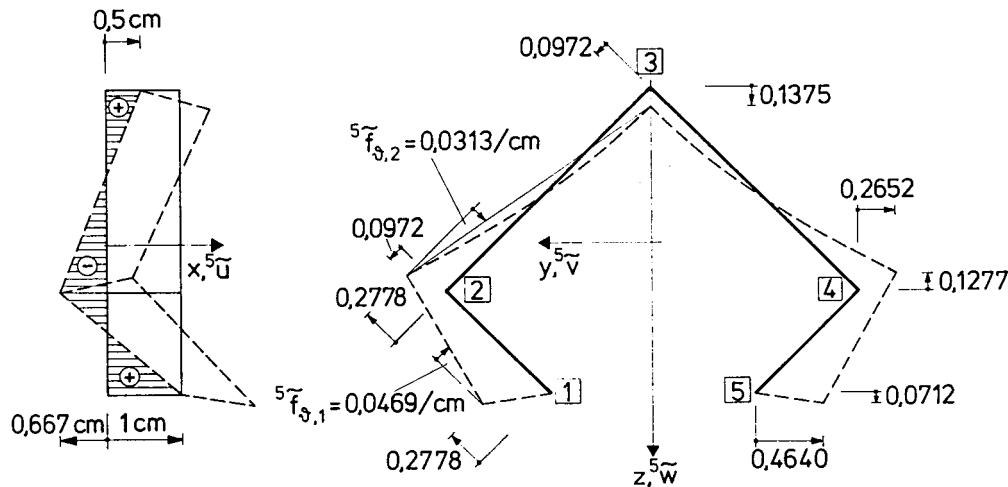


Bild 1.16 Zusammenhang zwischen der Einheitsverwölbung ${}^5\tilde{u}$ und der Einheitsverformung ${}^5V = 1$ beim biegesteifen Faltwerk

Die Querkrümmungen bezeichnen wir mit \ddot{f} , die Einheitsquerkrümmungen mit $\ddot{\tilde{f}}$. (Das Zeichen f kennzeichnet Verschiebungen quer zur s -Richtung, ein Punkt bedeutet Ableitung nach s .)

Zu den Querkrümmungen gehören Querbiegemomente m_s , für die das bekannte Elastizitätsgesetz

$$m_s = -\ddot{f} \cdot K \quad (1.55)$$

gilt. Darin ist K die Plattensteifigkeit, die in unserem Beispiel den konstanten Wert

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} = 51,923 \text{ kNcm} \quad (1.56)$$

hat.

Auch für die Querbiegemomente wird ein Produktansatz gewählt:

$${}^k m_s(s, x) = {}^k \tilde{m}_s(s) \cdot {}^k V(x) . \quad (1.57)$$

Darin ist ${}^k \tilde{m}_s$ das Einheitsquerbiegemoment im Einheitsverformungszustand ${}^k V = 1$.

Der Verlauf der Querbiegemomente zwischen den Knoten ist linear, so daß zur vollständigen Beschreibung der Querbiegemomentenlinie die Kantenmomente ausreichen. In unserem Beispiel tritt im Einheitszustand ${}^5 V = 1$ nur das eine Kantenmoment ${}^5 \tilde{m}_{s,3}$ auf, alle anderen sind null.

Für die Berechnung dieses Kantenmoments wird der Querschnitt wie ein biegesteifer Rahmen mit der Biegesteifigkeit K nach (1.56) behandelt, auf den die gegenseitige Verdrehung der Scheiben 2 und 3 als Lastfall einwirkt. Wir lösen diese Aufgabe mit dem Kraftgrößenverfahren, wobei man die eigentliche Berechnung vorteilhaft am abgewinkelten Querschnitt ausführt (Bild 1.17). Das Kantenmoment ${}^5 \tilde{m}_{s,3}$ wird als statisch Überzählige gewählt, und wir erhalten

$${}^5 \tilde{m}_{s,3} = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-{}^5 \Delta \tilde{f}_{\vartheta,3}}{\frac{1}{3}(b_2 + b_3)/K} = 0,4056 \text{ kNcm/cm}^2 .$$

Damit ist die gesamte Einheitsquerbiegemomentenlinie ${}^5 \tilde{m}_s$ bekannt (Bild 1.17).

In der Einheitsverschiebungsfigur ${}^5 V = 1$ (Bild 1.16) müssen noch die Verschiebungen der Knoten 1 und 5 ermittelt werden. Hierzu berechnen wir (z.B. mit der Mohrschen Analogie) die Verdrehung des Knotens 2:

$$\begin{aligned} {}^5 \dot{\tilde{f}}(\text{Knoten } 2) &= \frac{{}^5 \tilde{m}_{s,3} \cdot b_2}{6K} + {}^5 \tilde{f}_{\vartheta,2} \\ &= 0,0156/\text{cm} + 0,0313/\text{cm} = 0,0469/\text{cm} . \end{aligned}$$

Da dieser Knotendrehwinkel gleich dem Sehnendrehwinkel ${}^5 \tilde{f}_{\vartheta,1}$ der Scheibe 1 ist (s. Bild 1.16), erhalten wir die Einheitsverschiebung des Knotens 1 und aufgrund des symmetrischen Bildes auch die des Knotens 5:

$$\begin{aligned} {}^5 \tilde{v}_1 &= -{}^5 \tilde{v}_5 = 0,2652 + 0,0469 \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = 0,4640 , \\ {}^5 \tilde{w}_1 &= {}^5 \tilde{w}_5 = -0,1277 + 0,0469 \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = 0,0712 . \end{aligned} \quad (1.58)$$

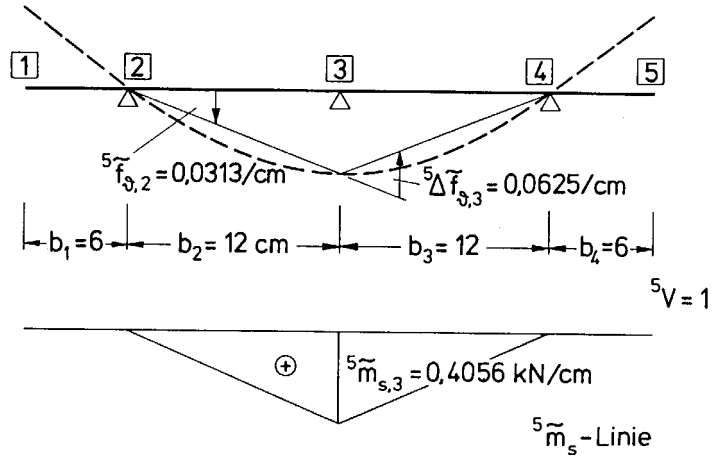


Bild 1.17 Einheitsverformung ${}^5V = 1$ und Einheitsquerbiegemomentenlinie ${}^5\tilde{m}_s$ am abgewickelten biegesteifen Querschnitt

Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß wir die Querbiegemomente auch mit dem Weggrößenverfahren berechnen können, was sich hier anbietet, da die Verformungsfigur die Ausgangsgröße ist. Wir haben aber trotzdem das Kraftgrößenverfahren gewählt, um diese Rechenmethode am Beispiel zu üben, da sie beim allgemeinen Querschnitt (Kap. 2) benutzt wird.

So wie wir die Wölbsteifigkeit $E^k C$ als pauschalen Wert verstanden haben, der als Arbeit der Längsspannungen an einem bestimmten Einheitsverwölbungsbild berechnet wurde, fassen wir die Wirkung der Querbiegemomente zu einem Wert zusammen, der Querbiegesteifigkeit 5B . Sie ist definiert als die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte an den Krümmungen des Einheitszustandes:

$${}^5B = - \int_s {}^5\tilde{m}_s {}^5\ddot{f} ds . \quad (1.59a)$$

Mit dem Elastizitätsgesetz (1.55) erhalten wir

$${}^5B = \int_s \frac{({}^5\tilde{m}_s)^2}{K} ds . \quad (1.59b)$$

In unserem Beispiel ist

$${}^5B = \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{3} ({}^5\tilde{m}_{s,3})^2 (b_2 + b_3) = 0,02535 \text{ kN/cm}^2 .$$

Die Wirkung der Querbiegesteifigkeit ist wie die einer elastischen Bettung oder einer Gegenlast, die proportional zur Größe der Verformung wächst. Sie geht

deswegen proportional mit 5V in die Differentialgleichung ein, so daß diese erweitert wird zu

$$E{}^5C{}^5V'''' + {}^5B{}^5V = {}^5q . \quad (1.60)$$

Die Differentialgleichung (1.60) gleicht formal derjenigen des Balkens auf elastischer Bettung. Die Wölbsteifigkeit $E{}^5C$ ersetzt die Biegesteifigkeit EI , die Querbiegesteifigkeit 5B die Bettung k . Wir können daher die bekannten Eigenschaften des Balkens auf elastischer Bettung auch auf unsere Differentialgleichung anwenden. Dort werden mit der Kenngröße λ

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{{}^5B}{4E{}^5C}} \quad (1.61)$$

Bereiche besonderen Tragverhaltens gegeneinander abgegrenzt. Bei den Lagerungsbedingungen und der Lastanordnung des Beispiels kann man für $\lambda l \leq 1$ mit guter Näherung die Bettung und für $\lambda l \geq 10$ die Biegesteifigkeit vernachlässigen. Im ersteren Fall hat man den gewöhnlichen Balken, im letzteren erzeugt die Biegesteifigkeit nur eine Randstörung im Bereich der Auflager, d.h. im mittleren Balkenbereich gibt es eine konstante Verformung ${}^5V = {}^5q/{}^5B$ ohne Wölbmoment.

Übertragen auf den Vorgang 5 verhält sich ein kurzer Balken unter der Belastung 5q wie ein Gelenkfaltwerk, beim langen gibt es Längsspannungen ${}^5\sigma_x$ nur als Randstörungen im Bereich der Auflager. Die Profilverformung 5V ist dann im wesentlichen konstant (${}^5V = {}^5q/{}^5B$). Im Bereich mittlerer Balkenlängen muß die Differentialgleichung (1.60) gelöst werden (s. auch Kap. 8).

Dieser Fall liegt hier vor, denn mit der Formel (1.61) erhalten wir $\lambda = \sqrt[4]{1,6768 \cdot 10^{-7}} = 0,02024/\text{cm}$ und $\lambda l = 2,43$.

Für die Schnittgröße 5W in Feldmitte ergibt sich mit Gleichung (8.9)

$${}^5W(l/2) = \frac{{}^5q}{\lambda^2} \cdot \frac{\sin \lambda \frac{l}{2} \sinh \lambda \frac{l}{2}}{\cosh \lambda l + \cos \lambda l} = 9,743 \text{ kNcm} .$$

Hierin ist ${}^5q = 0,1375q$, denn dieser Wert ist gegenüber dem Gelenkfaltwerk unverändert.

Die Längsspannungen ${}^5\sigma_x$ werden damit kleiner als im Falle des Gelenks an der Kante 3 (Tabelle 1.6). Sie werden wieder nach (1.23) berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1.9 angegeben und in Bild 1.18 zusammen mit der Verformung dargestellt.

Für die Verformungresultante 5V in Feldmitte erhält man

$${}^5V(l/2) = \frac{{}^5q}{{}^5B} \left(1 - \frac{2 \cosh \lambda \frac{l}{2} \cos \lambda \frac{l}{2}}{\cosh \lambda l + \cos \lambda l} \right) = 0,4024 \text{ cm} .$$

Tabelle 1.9 Längsspannungen des biegesteifen Querschnitts in Feldmitte in kN/cm^2

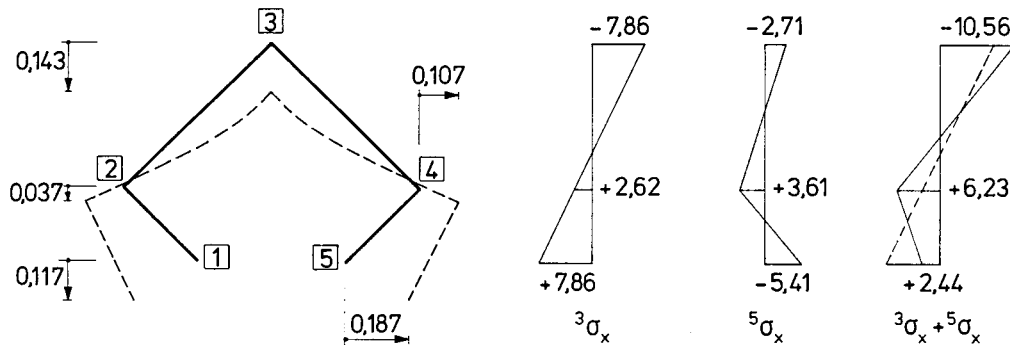
Knoten $r =$	1	2	3	4	5
${}^3\sigma_{x,r}$	7,86	2,62	-7,86	2,62	7,86
${}^5\sigma_{x,r}$	-5,41	3,61	-2,71	3,61	-5,41
$\sigma_{x,r} = {}^3\sigma_{x,r} + {}^5\sigma_{x,r}$	2,44	6,23	-10,56	6,23	2,44

Tabelle 1.10 Knotenverschiebungen v des biegesteifen Querschnitts in Feldmitte in cm

Knoten $r =$	1	2	3	4	5
3v_r	0	0	0	0	0
5v_r	0,187	0,107	0	-0,107	-0,187
$v_r = {}^3v_r + {}^5v_r$	0,187	0,107	0	-0,107	-0,187

Tabelle 1.11 Knotenverschiebungen w des biegesteifen Querschnitts in Feldmitte in cm

Knoten $r =$	1	2	3	4	5
3w_r	0,088	0,088	0,088	0,088	0,088
5w_r	0,029	-0,051	0,055	-0,051	0,029
$w_r = {}^3w_r + {}^5w_r$	0,117	0,037	0,143	0,037	0,117

**Bild 1.18** Verschiebungen (in cm) und Längsspannungen (in kN/cm^2) des biegesteifen Querschnitts in Feldmitte nach den Tabellen 1.9 bis 1.11

Durch Einsetzen der Einheitsverschiebungen (1.51) und (1.58) in die Gleichungen (1.12b-c) erhalten wir die Kantenverschiebungen in Feldmitte. Sie sind in den Tabellen 1.10 und 1.11 zusammengestellt und in Bild 1.18 aufgetragen.

Das Querbiegemoment m_s folgt in x -Richtung der Funktion 5V und beträgt nach Gleichung (1.57) in Feldmitte

$$m_{s,3}(l/2) = {}^5\tilde{m}_{s,3} \cdot {}^5V(l/2) = 0,4056 \cdot 0,4024 = 0,163 \text{ kNcm/cm} .$$

Bei dem Beispiel des Vier-Scheiben-Querschnitts gibt es nur eine weitere Wölbfunktion ${}^5\tilde{u}$, die durch die vier Orthogonalitätsforderungen (1.39) bis (1.42) bis auf einen frei wählbaren Normierungsfaktor eindeutig war. Für einen symmetrischen Fünf-Scheiben-Querschnitt läßt sich auf ähnliche Weise noch eine weitere antimetrische Wölbfunktion bestimmen. Für allgemeine Querschnitte mit mehr als fünf Knoten findet aber diese Vorgehensweise ihre Grenze, weil die Ermittlung der höheren Wölbfunktionen nicht mehr eindeutig ist. Während nämlich die Zahl der Orthogonalitätsbedingungen für die fünfte Wölbfunktion bei vier bleibt, liegt die Zahl der Freiheitsgrade höher als fünf, so daß eine unendliche Vielfalt von orthogonalen Lösungen möglich ist. Die Lösung wird erst dann eindeutig, wenn aus der Vielfalt der orthogonalen Wölbfunktionen diejenigen ausgesucht werden, die nicht nur die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_A {}^i u {}^k u \, dA = 0 \quad \text{für } i \neq k \quad (1.62)$$

erfüllen, sondern für die auch die innere Arbeit der Querbiegemomente ${}^i m_s$ des Zustandes i an den Querkrümmungen ${}^k \ddot{f}$ des Zustandes k verschwindet:

$$\int_s {}^i m_s {}^k \ddot{f} \, ds = 0 \quad \text{für } i \neq k , \quad (1.63)$$

damit die Differentialgleichungen nicht über den Querbiege­widerstand ver­kop­pelt werden.

Diese beiden Forderungen werden im folgenden Kapitel zur Formulierung eines Eigenwertproblems genutzt, mit welchem eine systematische Ermittlung aller orthogonalen Wölbfunktionen möglich ist, bei der auch die Einheitsverwölbungen der vier Starrkörperzustände automatisch mit herauskommen.

Dieses systematische Vorgehen ist nicht nur notwendig, um eine programmiergerechte Handhabe für Querschnitte mit beliebig vielen Scheiben zu bekommen, sondern es bildet ein so allgemeines Verfahren, daß auch später noch hinzukommende Besonderheiten — wie z.B. Querschnittslagerungen — damit erfaßt werden können.